EDIZIONE NAZIONALE

MATHEMATICA ITALIANA

per il Ministero per i Beni e le Attività Culturali

ORIGINE,

TRASPORTO IN ITALIA,

PRIMI PROGRESSI IN ESSA

DELL' ALGEBRA.

STORIA CRITICA

DI NUOVE DISQUISIZIONI

ANALITICHE E METAFISICHE ARRICCHITA

DI

D. PIETRO COSSALI C. R.

VOLUME I.

DALLA REALE TIPOGRAFIA
PARMENSE

cIↃ. IↃCC. XCVII.

A SUA ALTEZZA REALE

D. FERDINANDO I.

INFANTE DI SPAGNA

DUCA

DI PARMA, PIACENZA, GUASTALLA

EC. EC. EC.

PIETRO COSSALI.

ALTEZZA REALE

Non è questa, che io Vi presento, una di quelle storie di strepitose gesta di battaglie di stragi di assalti e di trionfi sovente già consecrate e care agli Alessandri, se al Macedone non sempre in grandezza di animo uguali, ugualmente di allori *cupidi e di conquiste dall'uno all'altro emisfero: Ad un Regnante, qual Voi, cui sta nello spirito altamente fisso il sapientissimo principio, che il fiore, non l'ampiezza, del Regno è del Regnante la gloria, altre storie non si conviene di offerire, nè gradevoli tornar posson che quelle o dell'Augusta Religione, che tutta in sè, o ne' suoi alti misterj purissimo amore, purissimo amore ispirando in dolce vincolo di esso unisce, e adegua le disuguali parti della società, e nella soave misura, nel tranquillo sostegno delle leggi della pubblica felicità si rende la più feconda, la più sicura radice; o delle liberali Arti della bella natura imitatrici, che per la via de' sensi nell'animo imprimendo le immagini della proporzione dell'ordine dell'armonía della venustà del decoro lo allettano a trasportare sì leggiadre qualità su gli affetti su le parole su le operazioni, sì che ogni interno ed esterno movimento riesca a bel costume temprato; o delle sublimi Scienze, che all'intelletto illuminando ognora nuovi alti sentieri, ed insieme additandogli sempre un'infinita estensione ancor per lui tenebrosa, nè appieno comprensibil mai, gli provano ad un tempo di quanto sopra gli altri animali al senso circoscritti per natural condizione si elevi, e per condegni nobili desiri elevar si debba, e lo umilian davanti all'eterna archetipa semplicissima Intelligenza del fatto, e del possibil tutto. In questa ul-*

tima spezie si è la storia che io a Voi dedico, e sacro della origine dell'algebra tra i greci e tra gli arabi, del trasporto di essa dall'Arabia in Italia, e de' primi progressi suoi in queste belle, e gloriose contrade. L'Italia per dono di natura bella nel sereno cielo, nel temperato clima, nell'ubertoso suolo, nel boreal arco delle dirupate Alpi col tergo scudo ai ferali nembi e con la fronte specchio ai vivifici raggi del Sole, nella catena degli Appennini di quinci sino all'austral estremità elevata a ripartirla in due deliziose valli al mattin l'una alla sera l'altra pendente, nelle dovizie de' marmi e de' metalli in sen di quelle e di questi all'industria di lei apparecchiati, nella copia nella disposizione nella maestà de' fiumi dalle une e dagli altri scendenti ad irrigare i piani e favorire i traffici tra le provincie, nelle minerali acque nelle ferventi terme nei fiammeggianti terreni nei solforosi campi nei neri laghi avernali nei fragorosi vulcani negli accesi di pietre eruttati fiumi, mirabili spettacoli al vulgar occhio e gratissimi a quello del filosofo indagatore, nel mare di grandi e piccole di floride e abbrustolate isole in piacevol variato prospetto disseminato a lei dintorno ad oriente ad occidente ad austro aperto a largo in ogni parte opulente commercio: l'Italia per don di natura sì bella si circondò non meno di gloria in farsi madre di prestantissimi ingegni, quali maestri in animar tele *in figurar rami in effigiar bronzi in personificar sassi in architettar edifizj in armonizzar suoni, quali esemplari di alto concepire di gajo immaginare di facondia di eleganza di numero di forza di dilicatezza, o nella grave persuasiva eloquenza, o nell'amena incantatrice poesía, quali dottori di saper nuovo od in rimote regioni con disastrosi viaggj raccolto ed illustrato, o con proprj esperimenti squisiti discoperto, o con vegghiate meditazioni profonde conseguito. E vero è, che le storie scorrendo ci si presenta l'Italia maisempre qual pianta eccelsa, cui più furibondo il turbine strigne l'aquilon crolla la grandine flagella il fulmine percuote; ma su la sua radice ben salda di robusti organi tessuta di eletti indeficienti umori nutricata sotto la sferza stessa del nembo, e tra le ire della procella non lascia di mettere qualche bel germe, e ritornata appena la calma rasserenato l'aere de' vaghi suoi fiori e delle frutta sue preziose a dovizia si riveste. E qual di fatto in Italia età più torbida, e più funesta di quella dagli ultimi lustri del secolo duodecimo sino al compiersi del secolo decimoterzo, e per le aspre rivalità e gelosíe delle Repubbliche che novellamente eran nate, e per le armate dispute ai Regni rimasti salvi, e per le sanguinose contese all'Imperial solio, e per le lunghe accese discordie tra questo e il Sacerdozio? E pur fu nell'imperversare di tanto scompiglio tumulto* *sconvolgimento, che Leonardo di Bonacci pisano dalle sue navigazioni all'Africa ed all'Asia ritornato aprì in Italia scuola di nuova dottrina, e di benefico zelo per sua patria animato udir si fece, e fu con plauso e frutto udito insegnar e trattare dell'Algebra l'arte: quell'arte che, allontanato lo strepito delle desolatrici armi forestiere estinto l'odio delle traditrici fazioni domestiche, per molti italiani colta, per Luca Pacioli diffusa, per essi e molto più per il Ferro il Tartaglia il Cardano il Ferrari il Bombelli aggrandita, e con la geometria assorellata a goder già insieme l'aurora di quel sole che per il Descartes un dì dovea di aurea luce riempierle, ebbe anche in progresso di più felici tempi e di più favoriti studj nel Cavalieri nostro il precursore a spignersi condotta grado grado dal Roberval dal Wallis dall'Hauffman dall'Uddenio dal Fermat dal Barow dal Newton dal Leibnitz dai Bernoulli dal Taylor dal Clairaut dal Fontaine dall'Eulero dal d'Alembert dal Condorcet dal la Place dal Monge per la vastità dell'infinito; e nel cammino costantemente seguita ed ajutata non poco da parecchj italiani, dal Grandi in precipuo luogo dal Manfredi dal Fagnani dai Riccati dal Paoli, al massimo genio e onor d'Italia il la Grange porse a preferenza di tutti la destra a fare i passi più ardui e misurare gli spazj più oscuri; onde per i congiunti sforzi di tanti eccelsi* *ingegni a mirabile estensione e potenza recata è divenuta in ogni parte della matematica scienza l'ala ai voli più arditi, sino ad alzarsi su di essa il la Grange a comprendere, con divina direi quasi comprensione, in breve tratto di simboli ogni equilibrio tutt'insieme, e qualunque specie e varietà di movimento. Ristrignesi la storia mia all'origine di quest' arte esimia in sì folte tenebre involta, che appena il coraggio ebbesi di toccarle, ed alle glorie rispetto a lei di Italia prime dalla negligenza se non dall'infedeltà oltraggiate per modo che non risplendetter sinora forse con la metà della luce. Qual vanto per l'Italia il contar tra' suoi colui, che dalle orientali regioni trasferita in Italia l'Algebra dischiuse all'Europa tutta una inesausta sorgente di sapere, e coloro, che ad ampliare l'analitica industria i primi valsero a stendere la finita determinazione delle irrazionali radici a tal grado, che indarno per più di due secoli si è contorto l'ingegno tentando promoverla a perfette equazioni più alte. Ma dell'algebraica dottrina, che Leonardo aprì ne' suoi scritti, due essendo i rami, non è che di uno, che dagli storici delle matematiche discipline fatto siasi cenno, lasciato l'altro nel silenzio e nell'oblivione. E parecchie utili scoperte, e sottili viste degli italiani algebristi, che lo seguirono, nel secolo decimoquinto e nel decimosesto massimamente, in luogo di ottenere la meritata fama, reca mara-*

viglia che la stessa sventura sofferta abbiano di rimanere nei libri loro per iterate impressioni della pubblica luce godenti all'occhio ancor del Montucla nascoste e sconosciute. Molte glorie quindi d'Italia son divenute glorie di altre regioni: chè l'Italia quanto bella ricca e gloriosa, tanto più divisa e più ancella, fu sempremai e in ogni genere proporzionevolmente debole nel possesso delle sue dovizie nel sostenimento dei suoi diritti nella conservazion delle sue glorie. L'affezione all'algebraica scienza ed alla Patria, l'amore della verità, e della giustizia mi hanno suggerito d'intraprender questa storia, e tenuto costante nel faticosissimo difficil lavoro. Spettava, più che a qualunque altro europeo, ad un italiano amator dell'algebra il dilucidarne, quanto è permesso, l'origine, ed era di un algebrista figlio d'Italia dovere il rivendicar le prime italiane algebraiche glorie.

Ma ad ottenere, che le più antiche glorie d'Italia nell'arte dell'algebra su la fronte di lei ritornate una luce acquistino solenne sicura non mai più estinguibile, a che raccomandarle meglio, che alla gloria Vostra, o Gran FERDINANDO? Nè quella gloria il mio pensiero contempla, che a Voi con tutti dell'Eccelsa Vostra Famiglia è comune; ma sì veramente quella, onde Voi con l'esemplare religion Vostra con le alte Vostre virtù con il magnifico patrocinio delle belle Arti delle amene lettere del-

le Scienze splendentissimamente fregiato Vi siete. Le opere di religione, che con le cure del regno formano il bel tessuto intero de' Vostri giorni, chiaramente dimostrano quanto vivo alla mente ognor tenete, che il Sovrano siede tra Dio ed il popolo. Saggio a conoscere la brevità e la fallacia delle viste dell'umana prudenza, al limpidissimo di sapienza divino Sole volgete l'intelletto a ricevere, come terso specchio, i purissimi raggi di lui, e su le genti vostre riverberarli nelle consigliate leggi nei provvidi divisamenti nelle scelte istituzioni. A quell' Eterno Amore Immenso, che ama senza lasciar d'esser giusto, e si fa giusto senza intermetter di amare, aprite il cuore a riempiersi degli amorosi sentimenti, che vi rendono universalmente benefico, in premiar sì largo, in punir sì schivo e sì dolce. Dall' Altissimo, che non passeggia no di sua beatità sol pieno e delle basse cose disdegnoso per le eccelse regioni, ma tiene d'occhio il più vile insetto; e dal Figlio in altezza uguale di lui, che per riparare alla più insana alterigia discese un dì tra gli uomini, fatto un di loro, apprendete Voi quella umanità quanto più rara ne' Grandi tanto più brillante in Voi nel Vostro volto nel parlar nel tratto Vostro. Non è la maestà in Voi un fulgore spaventevole, qual di saetta; è un fulgore amabile qual di cinosura; sedete Voi alto solamente per istendere più lontano il pietoso sguardo; e il Vostro solio *non è qual armata rocca su scoscesa balza per unico angusto erto calle accessibile, ma qual salubre fiorente vetta di ubertosa collina, a cui per ogni parte è agevole la salita. Dall'eminenza del seggio intendendo la considerazione e la sollecitudine ai varj beni, onde la felicità si compone de' popoli, a piena luce scorge la perspicace Vostra mente i vantaggi delle belle lettere ed arti nell'ingentilire, se caste, l'animo, e delle scienze nell'alzare, se non pervertite, l'intelletto a segrete verità scala alla Somma di tutte centro. Quinci il magnifico e vegghiante insieme patrocinio, che alle belle lettere ed arti ed alle scienze Voi concedete. E chi l'ignora od ignorar lo può? Il sanno i forestieri, che a Parma venendo hanno soddisfazione e diletto in visitare la copiosa scelta ornata biblioteca nel rapido corso di pochi anni per l'attivo zelo e per l'alta estimazione dell'immortal Paciaudi raccolta, in passeggiare il ben provveduto e disposto orto botanico, in conversare con gli egregj Professori da Voi posti ad istruire d'ogni pratica e specolativa dottrina i giovanili ingegni, de' quali sono queste Vostre provincie feraci. Il sanno le estere Accademie e scuole di belle arti, che a questa sotto i Vostri auspicj fiorente appellano come a giudice del più fino discernimento nelle dispute più difficili, e i membri di esse più insigni le offrono i più eccellenti lavori loro per andar fregiati della sua aggrega-*

PROSPETTO DE' CAPI

DEL VOLUME I.

CAPO I.

Trasporto d'Oriente. Coltivamento in Italia. Diffusion per l'Europa dell' analisi delle equazioni di primo e secondo grado.

§. I. Equazioni sei da Leonardo Pisano divisate: tre semplici, e tre composte. II. Scioglimenti delle tre composte con le geometriche dimostrazioni. III. Esempi del tenor generale, e di una particolar industria di Leonardo in trattare i problemi. IV. Epoca del trasporto dell'algebra in Italia per Leonardo; grosso errore di Montucla ritardantelo di ben due secoli. V. Traduzione della regola di algebra dall' arabo per Guglielmo di Lunis ad esso trasporto per Leonardo certamente posteriore. Se tal regola fosse l'operetta di Moamad? Coltivamento dell' algebra nel corso de' secoli XIII, XIV, XV in Italia. VI. Diffondimento dell' algebra per l'Europa. Chiare prove che dall'Italia si diffuse nelle Italiane impronte che seco portò. Dubbj dell'abate Andres a favor della Spagna che anteriormente all'Italia abbia posseduta l'algebra insussistenti; asserzioni del Gua-de-Malves temerarie. VII. Lenta non rapida, come il Montucla vuole, fu la propagazione dell'algebra per l'Europa; cagioni intrinseche ed estrinseche di tal lentezza. VIII. Confronto della dottrina analitica di Leonardo, e di quella di Moamad. Leonardo conobbe, e dimostrò le due radici dell'equazione $x^2+n=px$; laonde Cardano non fu il primo ad accorgersi della moltiplicità delle radici, e falla il Montucla. IX. Distribuzion primitiva dei termini delle equazioni; falsa asserzion di Montucla. X. Perchè da Leonardo fu ommessa l'equazione $x^2+px+n=0$; ommessa ugualmente dai maestri arabi. XI. Ragione per cui Leonardo con questi non conobbe le radici negative delle due equazioni $x^2+px=n$; $x^2=px+n$. Ambidue i difetti comuni a Diofanto, ed al suo Comentatore Bacheto, al Nugnez, al Vieta, all'Harriot eziandío. Gloria di Cardano che a questi quattro europei analisti anteriore distinse, e fu il primo a distinguere le radici positive e negative. XII. Paragone di quattro maniere in sciogliere le equazioni di secondo grado, di Leonardo, del Nugnez, di Diofanto, di Vieta; tra le prime tre non vi ha differenza essenziale. L'artificio di togliere il secondo termine su cui si fonda il metodo di Vieta è di origine italiano.

CAPO II.

(Pag. 25)

Original significato, ed ufficio di algebra.

§. I. Etimologici significati di algebra, ed Almucabala. II. Copia di errori di Montucla. III. Spiegazione del primitivo limitatissimo senso ed ufficio di algebra. IV. Altri errori di Montucla sopra i primi accumulati. V. Non hanno i Lessicisti di lingua araba e latina riguardo ad algebra penetrato lo spirito dell'etimologico significato *restaurazione*, e l'hanno male alle frazioni riferito. Le difficoltà del d'Alembert quindi dipendenti cadono. VI. Altre opinioni, qual falsa, qual anche ridicola e sconveniente su l'origine del nome algebra. VII. Esame delle idee del d'Alembert, del Wolfio, e di altri su la distinzione tra algebra, ed analisi. VIII. Come ad algebra conservata l'etimologica sua significazione conciliar con questa si possa il vasto odierno concetto di lei.

CAPO III.

(Pag. 37)

Analisi speciosa lineare. Passi alla speciosa letterale.

§. I. Fallo di Targion Tozzetti e dopo lui del Tiraboschi in attribuire a Leonardo Pisano l'uso delle lettere astratte, o sia un'analisi speciosa letterale: fu propiamente speciosa lineare. II. Aprimento alla storia dell' analisi speciosa letterale premettendone l'elogio di Montucla. III. Sentimenti di Teone, di Tartaglia, di Commandino di Gregori su l'oggetto, ed il modo di dottrina nei libri 5.°, 7.°, 8.°, 9.° di Euclide: vi ha in essi una teoria speciosa letterale. IV. Elementi di analisi speciosa letterale in Diofanto; sentenza di Vieta stesso, che di analisi speciosa si valesse egli alle sue scoperte. V. Progresso degli analisti italiani dall'analisi speciosa lineare di Leonardo alla speciosa letterale. VI. Materiali di analisi speciosa letterale in Europa preesistenti a Vieta. Pensiero su l'origine dei segni +, —. Giusto limite del merito di Vieta.

CAPO IV.

(Pag. 56)

Di Diofanto, e dell'analisi di lui.

§. I. Difficoltà di questo capo di storia. II. Quando si cominciasse in Italia e quinci fuori ad aver cognizione dell'opera di Diofanto. Numero, e qualità de' codici di essa nella biblioteca Vaticana. III. Quistione su la terminazione del nome del greco analista in Diofanto, o Diofante. IV. Sul tempo in cui fiorì. V. Del numero de' libri, de' quali compose Diofanto l'opera sua. Quando, e dove fu corrotta. Dei varj codici in varie parti. Degli scolj ai due primi libri. VI. Serie de' traduttori, e comentatori di Diofanto. Parecchi difetti di Montucla. VII. Sbaglio essenziale di lui in asserire non aver Diofanto nell'opera sua sciolta equazione veruna completa di secondo grado: si direbbe non aver Montucla veduto nè il testo mai di Diofanto, nè il comento di Bacheto; peggio chi ha dedotto essersi Diofanto arrestato alle equazioni di primo grado; toccò anzi egli alle complete di terzo, e si elevò più alto nelle pure. Scala diofantea de' gradi; il tenore di formarla descritto da Montucla difettosamente. VIII. Sovrana industria di Diofanto nell'analisi indeterminata, e semi-determinata. IX. Trattò egli anche quistioni determinate, ed in gran numero. Svista di Vincenzo Riccati, e contraria svista di Stevino in prender per tali quelle tutte del I libro. X. Controversia se Diofanto sia stato tra i greci l'inventor dei principj dell'analisi. Ragioni dell'abate Andres a favore ribattute. Distinzione dell'analisi determinata, e dell'indeterminata: Diofanto fu inventore di questa seconda non della prima. XI. Analisi geometrica delle equazioni di secondo grado per Euclide nei Dati LVIII, LIX, LXXXIV, LXXXV. Probabilità che quindi siasi derivata l'analisi aritmetica. XII. Pensier di Bacheto su la derivazione di questa da due problemi distinti da Diofanto coll'aggiunto *Plasmaticum* discusso.

CAPO V.

(Pag. 96)

QUADRI DUE ALGEBRAICI.

I.

Dei principj dell'analisi aritmetica di Diofanto riguardante i numeri quadrati e cubici.

II.

Del libro su i numeri quadrati di Leonardo Pisano.

QUADRO I.

Parte I. Porismi diofantei agli euclidei Elementi superiori. II. Artificj di semplice ugualità. III. Artificj di doppia ugualità simile. Confronto ad illustrazione con gli artificj del la Grange. IV. Artificj di doppia ugualità dissimile, classe non osservata da Bacheto, e dai posteriori analisti non coltivata, neppur dall'Eulero, nè dal la Grange.

QUADRO II.

Parte I. Generazioni de' numeri quadrati; quesiti relativi. II. Problemi di semplice ugualità. III. Problemi di doppia ugualità. Alcuni superiori agli artificj diretti più fini dell' Eulero, e del la Grange. Importante osservazione sul metodo più generale di questo sublime analista. Nuovi teoremi amplianti le risoluzioni indirette e particolari di Leonardo. IV. Somme delle serie de' numeri quadrati, e cubici, e riguardo ai numeri quadrati la somma non solo della serie intera e continua, ma anche separatamente delle serie parziali e interrotte de' quadrati de' numeri pari, o de' dispari. Innesto del teorema di Archimede la intera serie spettante con ridurre alla maggiore perspicuità, e sveltezza insieme la dimostrazione. Innesto pur di altra dimostrazione nuova. Innesto per terzo delle dimostrazioni provenienti dalle generali formole delle serie algebraiche. Giudicio temerario, e falso di Xilandro, che Leonardo abbia dai libri di Diofanto nel libro suo trasferito i problemi intorno ai numeri quadrati. Differenza dei problemi e dei metodi dell'uno e dell'altro. Trattato *De numeris polygonis* di Thebit. Probabilmente il libro di Leonardo fu un tessuto di cose diofantee passate tra gli arabi per il comento di Moamad AlBuziani, di invenzioni aggiunte dai maestri arabi, e di studj suoi proprj. Due specie di analisi da Leonardo insegnate la determinata, e la indeterminata; di questa un profondissimo silenzio presso Montucla sebben facil gli fosse aquistarne notizia dal volume stampato di Fra Luca. Bossut anch'egli per seguir Montucla difettoso.

CAPO VI.

(Pag. 173)

Dell'origine dell'analisi tra gli arabi.

§. I. Oscurità somma della quistione, e sue parti. II. Passo nella Biblioteca arabica de' filosofi di certo anonimo egiziano a favor dell'opinione che l'analisi degli arabi sia da Diofanto derivata. Non coerente ad altri lumi somministrati dalla stessa Biblioteca. Inesattezza del Casiri. Deduzioni dell'abate Andres da lui ingannato. III. Esame del senso di un testo del Cazuineo in cui fa Moamad Khuarezmita primo maestro ai maomettani dell'algebra. IV. Leonardo nulla dice espressamente dell'origine dell'algebra in particolare, ma da ciò che dice in generale della dottrina nel suo libro spiegata muove a crederne indiana l'origine. V. Frate Luca appella gli arabi primi inventori dell'algebra, ma non nomina mai Moamad. VI. Quattro luoghi di Cardano diversissimi, seminati di falsità e contraddizioni. VII. Tartaglia persuaso che Moamad fosse stato dell'algebra l'inventore. Gradi di tal opinione invalsa in Italia, e per quai motivi. VIII. Quando in Italia siasi introdotta l'operetta di Moamad. IX. Bombelli in luogo di seguire la comune opinione a favor di Moamad asserisce l'algebra di indiana origine, adducendo che Diofanto cita assai volte gli indiani; ma falso che li citi pur una volta. X. Ragioni del Wallis a prova della indiana origine dell'algebra; altre ragioni. Confronto esatto delle scale de' gradi di Diofanto e degli arabi. Falli del Wallis medesimo. XI. Montucla comincia qui ad appalesare che non vide l'*Arte magna* di Cardano. Sua ingiustizia verso l'inventor dell'analisi delle equazioni di secondo grado. Infedeltà in esporre un sentimento di Cardano onorevole a Moamad. Argomento di lui per l'origine greca dell'algebra arabica fondato su l'ipotesi che questa parte di matematica sia stata tra gli arabi di poco meno antica che le altre ricevute dai greci. Prospetto del trapiantamento e fior delle scienze greche non solo, ma persiane altresì ed indiane tra gli arabi sotto i regni di Almansor, Haroun, Almamon. Qualche svista del Bailly. Difetti dell'ipotesi, e dell'argomento di Montucla. Incostanza di lui. XII. Riflessioni sopra lo scritto in ciò dall'abate Andres. XIII. Distinzione essenziale e necessaria di due Moamad ben Musa confusi in uno dal Bailly e dall'abate Andres. XIV. Risultato di tutta la discussione in VII proposizioni. XV. Mostruosità del Saverien indegne di essere frammischiate ai tratti esaminati degli altri scrittori.

APPENDICE

(Pag. 223)

Del grado al quale gli arabi giunsero nell'analisi, e degli scritti loro.

CAPO VII.

(Pag. 232)

De' progressi dell'algebra da Leonardo Pisano a Fra Luca Pacioli.

§. I. Falsi limiti da Montucla e dal Bossut assegnati all'algebra di Fra Luca. II. Risoluzione per lui insegnata delle equazioni *proporzionali* da noi appellate derivative del secondo grado. Spirito doppio del nome *proporzionali*. III. Bello antico metodo di estrarre la radice quadrata dai binomj reali irrazionali, che la porge sempre in parti reali divisa, e tutta sotto reale aspetto, anche allor quando in parti immaginarie divisa, e tutta sotto aspetto immaginario si esibisce dal moderno metodo. Esame dei principj di questo e spiegazione del paradosso. IV. Distinzione dell'analisi prima, e dell'estrema delle equazioni proporzionali; quando siasi incominciato a tentare e come l'analisi estrema delle equazioni $x^6 \pm q x^3 \pm n = 0$: vale dir l'estrazione della radice cubica dai binomj irrazionali. V. Innesto della estrazion generale della radice qualunque dai binomj irrazionali, componendo l'antico metodo per la radice quadrata e indefinitamente di grado 2^k ed il metodo nuovo per le radici di grado espresso per numero qualsivoglia primo al 2 superiore. VI. Analisi geometrica dell'equazione $x^4 + q x^2 - n = 0$ per Euclide ne' suoi Dati LXXXVI, LXXXVII. VII. Risoluzion per Fra Luca di una equazione di quarto grado completa, o sia di tutti i suoi termini fornita. VIII. Problemi esponenziali, de' composti ancora, da Fra Luca nel modo, giusta le cognizioni di allora, men difettoso trattati. Distinzione del problema strettamente aritmetico, e dell' aritmeticamente impossibile.

CAPO VIII.

(Pag. 283)

Del Più, e del Meno. Delle regole per essi. Della difficoltà sul lor senso fra i termini apparentemente dissimili di una equazione. Del vero grado, della specie, dell'essenza, del significato dell'altezza di questi. Della quantità negativa. Storicamente, Matematicamente, Metafisicamente.

§. I. Catena delle cose enunciate. II. Regole per Diofanto premesse, che Meno moltiplicato per Meno produce Più, e Meno moltiplicato per Più produce Meno. Meno in stato complesso; e Meno in stato solitario; quantità negativa: se Diofanto ne abbia avuto concetto? Dimostrazione geometrica delle regole per lo scoliasta considerato il Meno in stato complesso. III. Origine ed ufficio del Più e del Meno giusta Fra Luca, e speciosa idea della verità dell'equazione, ancorchè uno dei termini incogniti segni superficie, l'altro linee. IV. Idee, od espressioni false, od inesatte de' moderni intorno alla omogeneità di grado nelle equazioni. La omogeneità non s'introduce, ma si educe, essendo ogni equazione per natura e di necessità omogenea nel grado de' termini. Ammetton le equazioni la eterogeneità di specie o sia la mistura di parti razionali ed irrazionali, e la eterogeneità di essere o sia la mistura di parti reali ed immaginarie; con qual legge? Disquisizione su la rappresentazione dei termini di una equazione più alta del terzo grado; ed occasion data altre considerazioni metafisiche su le equazioni. V. Regole della moltiplica del Più, e del Meno dimostrate da Fra Luca, e geometricamente, e con letterali specie; regole della divisione, della addizione, e della sottrazione in dodici casi distinta. VI. Idea in Fra Luca della quantità negativa, come nata, come da lui definita. Ampio dilucidamento delle quantità positive e negative geometriche, fisiche, e morali con nuovi riflessi fisici, e rivendicamento all' Italia delle glorie di due fisici sistemi. Della universal rappresentazion aritmetica delle quantità positive, e negative. Delle varie specie di zero ad esse interposto. Quistione se sieno omogenee o eterogenee discussa. Definizioni di varj autori esaminate; la semplice e vera stabilita. Proposizione della minoranza della quantità negativa in confronto dello zero sotto due aspetti considerata, in confronto di essere, ed in confronto di aritmetico rapporto alla quantità positiva, ed in tal aspetto salvata. VII. Confronto delle dimostrazioni antiche, e moderne, che Meno in Meno fa Più, considerato il Meno in stato complesso. Esclusione per il Wolfio della moltiplica del Meno semplice per il Meno semplice, o sia della quantità negativa per la quantità negativa, qual impossibile. Pretesa del Cardano che il prodotto sia negativo. Parer del Venini che non sia nè determinatamente positivo, nè determinatamente positivo ma astratto. Varie strade tenute per dimostrarlo positivo. Nuova teoria geometrica, ed aritmetica. Esame delle riferite dottrine. Su le ragioni di quantità positiva a negativa, e di negativa a positiva.

FINE DEL VOLUME

(Pag. 396)

CAPO I.

Trasporto d'Oriente. Coltivamento in Italia. Diffusion per l'Europa dell'analisi delle equazioni di primo e secondo grado.

§. I. Leonardo Bonacci di Pisa corona l'aureo suo libro di Aritmetica con l'analisi delle equazioni di primo e secondo grado, che egli pur ebbe il merito di trasportar dall'Oriente, ed insegnare il primo all'Italia, donde poi all'Europa tutta se ne diffuse la dottrina. Io doveva separarnela, ed a questo luogo trasferirla, per porla a capo della storia, che intraprendo della prima analisi. Tre considerazioni distingue Leonardo nel numero: una assoluta, o semplice, ed è quella del numero in sè stesso; le altre due relative, e sono quelle di radice, e di quadrato. Nominando il quadrato soggiugne *qui videlicet census dicitur*; ed il nome di censo è quello, di cui in seguito si serve. Applicando l'idea di numero semplice al numero, che or chiameremmo l'omogeneo di comparazione, quella di radice al numero sconosciuto, e quella di censo al quadrato di lui, dice, che il numero semplice, la radice, il censo in sei modi si uguagliano, e di tal guisa sei forme distingue di uguaglianze, o come diciam noi di equazioni. Eccole con l'ordine, nel quale Leonardo le dispone, ma per brevità nel nostro odierno specioso stile, dinotando per n il numero semplice od assoluto inserviente ad omogeneo di comparazione, per x la sconosciuta radice, per p un numero che la moltiplica, per x^2 il censo.

1.ª $x^2 = nx$. 2.ª $x^2 = n$. 3.ª $px = n$. 4.ª $x^2 + px = n$.

5.ª $px + n = x^2$. 6.ª $x^2 + n = px$.

Chiama i tre primi modi semplici, e composti gli altri tre. Lasciamo le risoluzioni dei semplici, e rechiamoci a quelle dei composti, che non tornerà disaggradevole a chi ama una piena scienza delle cose, e la cognizion dell'origin loro, vedere le geometriche dimostrazioni, su le quali Leonardo fonda gli scioglimenti. Sarò fedele in voltando in italiano, e contraendo il rozzo latin suo dire.

§. II. Sia in primo luogo $x^2 + px = n$.... Sarà $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 + n\right)}$.

Dimostrazione. Si costruisca (*Fig.* 1) su d'una retta bc maggiore di $\frac{1}{2}p$ il quadrato $abcd$, e prese su i lati le porzioni cg, cd, df, be tutte uguali ad $\frac{1}{2}p$, e condotte le rette gf, he intersecantisi in i, si formi il quadrato $igch = \frac{1}{4}p^2$. Si finga $ei = af = ea = if = bg = dh$ la quantità cercata x, sarà il quadrato $ai = x^2$; il rettangolo $bi = \frac{1}{2}px$, e parimenti il rettangolo $id = \frac{1}{2}px$. Dunque sarà il quadrato intero $abcd = x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$. Ma $x^2 + px = n$; dunque sarà lo stesso quadrato $abcd = n + \frac{1}{4}p^2$. Per conseguenza il lato bc di esso quadrato $= \sqrt{\left(n + \frac{1}{4}p^2\right)}$; e la quantità cercata $x = bc - gc = bc - \frac{1}{2}p = \sqrt{\left(n + \frac{1}{4}p^2\right)} - \frac{1}{2}p$.

Sia in 2.° luogo $x^2 = px + n$... Sarà $x = \frac{1}{2}p + \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 + n\right)}$.

Dimostrazione. Sia (*Fig.* 2) la retta $bc = x$, ed il quadrato su di essa costrutto $abcd = x^2$. Si pigli su bc la porzione $ec = p$, e si alzi la perpendicolare $ef = x$. Sarà il rettangolo $ed = px$. Dunque il rettangolo residuo $ea = n$. Ma $ea = be \times ba = be \times bc$; dunque $n = be \times bc = be^2 + be \times ec$. Si divida ec per metà in g, e sarà $n + eg^2 = be^2 + be \times ec + eg^2$. E quinci $\sqrt{(n + eg^2)} = be + eg = bg$. E $gc + \sqrt{(n + eg^2)} = gc + bg = bc$. Onde essendo $gc = eg = \frac{1}{2}p$, $bc = x$, sarà $\frac{1}{2}p + \sqrt{(n + \frac{1}{4}p^2)} = x$.

Sia in 3.º luogo $x^2 + n = px$. Se $\frac{1}{4}p^2 < n$, l'equazione è impossibile.

Se $\frac{1}{4}p^2 = n$, sarà $x = \frac{1}{2}p$.

Se $\frac{1}{4}p^2 > n$, sarà $x = \frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - n)}$, ovvero $x = \frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - n)}$.

Et sic si non solvetur quaestio cum diminutione (diminuendo vuol dire la quantità $\frac{1}{2}p$ con la sottrazion del radicale) *solvetur cum additione*.

Esempio. $x^2 + 40 = 14x \ldots x = 7 - \sqrt{(49 - 40)} = 7 - 3 = 4$, ed anche $x = 7 + \sqrt{(49 - 40)} = 7 + 3 = 10$.

Dimostrazione. Si conduca (*Fig.* 3) la retta ab, che rappresenti p, e si divida in due uguali parti in g, ed in due disuguali in d; e sopra una delle parti disuguali considerata $= x$ si costituisca un quadrato $= x^2$. Si costituisca primieramente sopra la minore db, supponendo essa $= x$. Si protragga la retta fe in i, sicchè sia $fi = ba$, e si congiunga la retta ia. Sarà tutto il rettangolo $af = ba \times bf = px$; onde essendo il quadrato $be = x^2$, sarà il rettangolo $ae = ad \times de = ad \times bd = n$. Ed aggiugnendo dall'una e l'altra parte il quadrato gd^2, sarà $ad \times bd + gd^2 = n + gd^2$. Ma per il teorema quinto del libro II di Euclide essendo in d la divisione di ab nelle due parti disuguali, ed in g la divisione di essa retta in due parti uguali, ed essendo conseguentemente gd la differenza delle disuguali parti, e delle uguali, si ha $ad \times db + gd^2 = bg^2$. Dunque $bg^2 = n + gd^2$. E perciò $bg^2 - n = gd^2$. Laonde $\sqrt{(bg^2 - n)} = gd$; e $bg - \sqrt{(bg^2 - n)} = bg - gd = db$: ossia $\frac{1}{2}p - \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 - n\right)} = x$. Se il quadrato x^2 costituiscasi sopra la parte maggiore ad, questa immaginando $= x$, si troverà con la medesima serie di raziocinj $\sqrt{(ag^2 - n)} = gd$; indi $ag + \sqrt{(ag^2 - n)} = ag + gd = ad$, cioè $\frac{1}{2}p + \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 - n\right)} = x$.

§. III. Fra i molti Problemi, che Leonardo passa a risolvere, stimo bene trasceglierne due.

Si proponga per primo di dividere il numero 10 in due parti tali, che divisa l'una per l'altra, ed alla somma dei quozienti aggiungendo 10, e moltiplicando l'aggregato tutto per la maggiore, finalmente provenga 114.

Risoluzione. Acciocchè si vegga il modo di risolvere di Leonardo, terrò tutto il filo delle sue operazioni, introducendo solo per compendio gli odierni segni. Denoti la retta a la maggiore delle cercate parti del 10 *quam*, dice Leonardo, *pono rem*; e la retta bg sia $= 10$, alla quale si congiungano nella medesima direzione le gd, de rappresentanti i quozienti delle divisioni delle due cercate parti l'una per l'altra. Poichè $a \times be = 114$; dunque $a \times bg + a \times gd + a \times de = 114$; e togliendo di qua e di là $a \times bg$, sarà $a \times gd + a \times de = 114 - a \times bg$. Sia gd il quoziente $\frac{10-a}{a}$, ne verrà $10 - a + a \times de = 114 - a \times bg = 114 - 10a$, essendo $bg = 10$; onde $a \times de = 104 - 9a$. Ma de è il quoziente $\frac{a}{10-a}$; dunque $\frac{a^2}{10-a} = 104 - 9a$. Per lo che $a^2 = 1040 - 194a + 9a^2$. *Restaura res diminutas*, cioè aggiugni da una parte e dall'altra $194a$ per ristaurare della diminuzione, che soffre il secondo membro, dal quale $194a$ sottratte vengono; *et extrahe unum censum ab utraque parte*, rimarranno $8a^2 + 1040 = 194a$; e dividendo per $8\; a^2 + 130 = 24\frac{1}{4}a$; e risolvendo secondo la regola, $a = \frac{97}{8} - \sqrt{\left(\left(\frac{97}{8}\right)^2 - 130\right)} = \frac{97}{8} - \frac{33}{8} = 8$. Conseguentemente $10 - a = 2$. Leonardo non prende qui il radicale nell'altro senso di aggiunta, perchè ne verrebbe $a = 16\frac{1}{4}$ e quindi $10 - a = -6\frac{1}{4}$.

Si veggono in questa Risoluzione le operazioni di trasporto per addizione, per sottrazion, per moltiplica, per divisione, che convenivano all'oggetto di liberare l'incognita, e ridurre l'equazione alla più semplice forma: si mirerà nello scioglimento, che vo a soggiugnere, l'arte di togliere i radicali, ed in oltre una particolar industria nelle posizioni degna di riflesso.

Problema II. Divider 10 in due parti di modo, che sottraendo dalla maggiore la sua radice presa due volte, ed aggiugnendo alla minore la radice sua parimente moltiplicata per due, risultino quantità uguali.

Risoluzione. Si ponga la parte maggiore essere $5 + x$, e la minore $5 - x$: sarà $5 + x - 2\sqrt{(5 + x)} = 5 - x + 2\sqrt{(5 - x)}$. Onde $x = \sqrt{(5 - x)} + \sqrt{(5 + x)}$. Quadrando, $x^2 = 10 + 2\sqrt{(25 - x^2)}$. Perciò $x^2 - 10 = 2\sqrt{(25 - x^2)}$, e di nuovo elevando al quadrato, $x^4 - 20x^2 + 100 = 100 - 4x^2$. Conseguentemente $x^4 = 16x^2$; ossia $x^2 = 16$, quinci $x = 4$.

Ella è senza dubbio una bella industria, invece di prender per x una delle cercate parti, volgersi ad esprimer per x l'eccesso dell'una, e il difetto dell'altra rapporto alla metà del numero 10 dato a dividere, e così porre la maggiore $= 5 + x$, la minore $= 5 - x$, a fine che trovandosi nell'uno e nell'altro membro dell'equazione uguali numeri liberi, si elidessero essi tosto, e i nuovi numeri svolti dai radicali con quadrare due volte, riuscendo anch'eglino uguali, si abbattessero parimenti, e l'equazion divisa per x^2 terminasse ad una equazion incompleta semplicissima di secondo grado; laddove ponendo una delle parti $= x$, l'altra $= 10 - x$, la risoluzione montata sarebbe ad una equazione completa di grado quarto.

§. IV. L'epoca fortunata, in cui l'Italia ricevette da Leonardo la dottrina dell'analisi delle equazioni di primo e secondo grado, fu all'entrar del secolo XIII, avendo egli nell' anno secondo composto il libro suo, e qualche istruzione è a credere, che ne avesse data avanti un tal compiuto lavoro. Montucla nella Storia del secolo XV, art. IV, scrive: *Il n'en fut pas de l'algebre, comme de l'arithmétique des arabes: cette doctrine pénétra assez tôt parmi nous . . . . . mais la connoissance de l'algebre fut une nouveauté du commencement du XV siecle. On s'accorde généralement à croire, que ce fut Léonard de Pise qui la transplanta d'Arabie dans ces climats.* Lo spazio di tempo, del quale lo Storico delle matematiche ritarda all'Italia l'acquisto dell'algebra, non è nullameno che di due secoli; e lo disgiunge egli da quello dell'aritmetica degli arabi, o a meglio dir degli indiani, mentre l'uno e l'altro acquisto furon congiunti, e tutti e due mercè di Leonardo, e con lo stesso libro di lui. Dimostrato anterior di due secoli al tempo dal Montucla assegnato il trapianto dell' algebra in Italia, cade l'argomento dei rapidi progressi di essa da lui desunto dal trovarsi nella trigonometria di Regiomontano di Konigsberg nella Franconia alla metà del secolo XV un problema conducente ad equazione di secondo grado, per lo scioglimento della quale rimette Regiomontano alle regole dell'arte, dando così a divedere, che erano già in quel paese dall'Italia lontano ben conosciute. Ma innanzi di parlare della diffusione dell'analisi alle estere regioni di Europa ordin vuole, che io dica del coltivamento di essa in Italia.

§. V. Pisa fu quella, che dal suo cittadino Leonardo immediatamente bebbe il lume dell'analisi, ed essa fu il centro, da cui si propagò. Per la Toscana, e tra le città di lei in Firenze la più cospicua, propagar si dovea primamente. Il dotto e cortese altrettanto cavalier Giambatista Clemente Nelli mi mostrò un *Ragionamento di algebra* di Raffaello Canacci, aritmetico e geometra fiorentino, scritto a giudizio degli antiquarj nel secolo XIV. Ecco uno dei coltivatori dell'algebra; ed un altro egli ne loda a sè anteriore nominato Guglielmo di Lunis. Non debbo anzi dissimulare ciò che di lui dice il Canacci sul principio del suo ragionamento, ponendo: *La regola dell'argibra, là quale regola Ghughelmo di Lunis la traslato darabico a nostra lingua:* dal che parrebbe a Guglielmo di Lunis, anzichè a Leonardo Bonacci di Pisa, dovuta la gloria di avere il primo fatto conoscere all'Italia l'algebra. Ma oltre a che impudenza solenne di Leonardo stata sarebbe l'addurre a motivo di comporre il suo libro, che la latina gente non più andasse mancante della piena scienza dei numeri da lui in esso spiegata: *Ut gens latina de cetero absque illa minime inveniatur*: oltra a ciò, lo stesso aver Guglielmo d'arabico ad italiana lingua tradotto dissipa ogni dubbio, e decide essere al libro di Leonardo la traduzion di Guglielmo posteriore. Leonardo sollecito, che la gente latina non rimanesse più a lungo della piena scienza de' numeri, la miglior parte della quale l'analisi delle equazioni di secondo grado, priva, e sfornita, compose nel 1202 il suo libro in lingua latina, e nella stessa lingua il rifece l'anno 1228; prova, che nell'Italia continuava la legge, e consuetudine di non scrivere che in latino. Guglielmo voltò d'araba in italiana lingua; prova, che già si era superata la legge, cangiato il costume, introdotto l'uso di scrivere italiano. Poichè concordan tutti quelli, che su l'origine della italiana lingua indagarono, che molto prima si cominciò ad usarla parlando che scrivendo, e prima scrivendo versi che scrivendo prose; nè prosa italiana veruna additar si sa anteriore all'anno 1264. Vedi fra gli altri Muratori nella sua bella dissertazione su questo soggetto, la trentesima seconda di quelle su le *Antichità italiane*. E ben comprendesi la ragion della gradazione, concependo giusta l'opinion del gran maestro in antichità la toscana odierna lingua qual avanzo dell'antica, che non lasciandosi spegnere sotto il giogo della latina, nè poi nell' involgimento in altre barbare, corrompendo ed essendo corrotta, delle composte forme in un sistema conciliate vestita, ricuperò a poco a poco il dominio; ma prima nel parlare, perchè più libero; poscia nello scrivere a legge più soggetto, e negli scritti poetici, siccome di diletto, prima che nei prosaici più gravi. Per il consenso adunque di tutti i dotti su la tarda epoca dello scrivere italiano in prosa è mestieri conchiudere, che la traduzion di Guglielmo dall'araba nella italiana lingua lungi dall'aver preceduto il libro latino di Leonardo non lo seguì che dopo non piccolo intervallo di tempo. Mi rappresento pertanto in Guglielmo uno di quelli, ne' quali trasfusa si era la dottrina di Leonardo, e che perito essendo insieme dell'arabica lingua, s'invaghì di leggere nella lingua della regione, onde venuta era, la regola dell'algebra, e poi ad esercizio, o pompa di sua perizia la voltò nell'italiana favella. Se la regola da Guglielmo tradotta avesse intrinseci pregi, per i quali meritasse d'essere agli insegnamenti di Leonardo preferita, io non lo so; so bene, che il Canacci, che con quella comincia, ricorre in seguito anche al libro di Leonardo, e dell' autorità di lui si vale. Della patria di Guglielmo, dell'arabo autore della regola per lui tradotta ci lascia all'oscuro il Canacci. Trovo che il Cardano nel cap. v della sua *Arte magna* dopo di aver dimostrate le due risoluzioni dell'equazione $x^2 + n = px$ si volge al leggitore dicendogli di non maravigliarsi, se per dimostrare ambe le risoluzioni, e chiaramente e speditamente con una stessa figura dimostrarle, cangiata avea la dimostrazion di Moamad: *Nec admireris hanc secundam demonstrationem aliter, quam a Mahumede explicatam*. Con che ci dà manifestamente a comprendere, che l'opera di Moamad figlio di Moisè correva per le mani degli Analisti; che per conseguenza era dall'arabo in comun linguaggio, o latino od italiano, convertita. E Bombelli nella prefazione al suo libro scrive espressamente, che un'opera di Moamad a' suoi dì vedeasi, ma che era di piccol valore. Io contuttociò non farommi ardito ad affermare essere stata questa la regola da Guglielmo di Lunis trasportata dall'arabo nell'italiano idioma. Nel secolo XIV, contemporaneo forse al Canacci, fiorì in Firenze il famoso Paolo de' Dagomari, nobile stirpe di Prato, del quale dice il Villani, che fu *geometra grandissimo, e peritissimo aritmetico*, e però *in aequationibus* tutti gli antichi e moderni passò. La sola parola *aequationibus* per autorevol detto del Ximenes (1) leggesi nel testo latino del Villani, che apparteneva alla biblioteca Gaddiana, ed ora trovasi nella Laurenziana; onde male a proposito nella traduzion italiana fu aggiunto *nelle adequazioni astronomiche*. Tre cose insieme ci fa vedere il dire del Villani: 1.ª che la dottrina delle equazioni riguardavasi già per antica, o il tempo, da che era stata introdotta e si coltiva-

(1) *Del vecch. e nuov. gnom. fior. Introd. stor.* parte II, §. IV.

va, ammetteva la distinzion di due parti, una rimota, l'altra prossima: 2.ª che in numero stati erano gli antichi coltivatori, e contavansi i moderni: 3.ª che Paolo o avea superati gli antichi tutti e moderni nella industria di maneggiar le equazioni, e sottoporre ad esse problemi più difficili, o sorpassati gli avea con aggiugner qualche cosa del suo alla teoría delle medesime. Per la sua eccellenza nell'aritmetica, della quale, come già si è detto, era allor parte l'analisi delle equazioni, fu Paolo soprannominato *dell'Abbaco*: morì nel 1366. Nell'alzarsi via via gli spiriti dalla barbarie, nel ripulirsi, nell'applicarsi ai varj generi di bella letteratura e di scienza è facile a credere, che la sorte pur dell'analisi divenisse ognora migliore. Che penseremo pertanto di tanti valenti, sì geometri ed aritmetici, come astronomi fiorentini, od a Firenze da altre città della Toscana, e ben anche da diverse parti dell'Italia recatisi a spiegar sotto il favore dei gran Medici i talenti loro, commendati dal Ximenes nell'istorica introduzion sopraccitata? Che in particolare di Paolo del Pozzo Toscanelli, di M. Mauro Servita, e di F. Ignazio Danti Domenicano, che cotanto di lor grido levarono per matematica scienza? Possiam dubitare, che nell'analisi delle equazioni non cercassero eziandío a distinguersi, e fare spicco dell'ingegno loro? Aggiungasi quel Pietro della Francesca dal Vasari celebrato per maestro sì raro di aritmetica e geometría. Ma più largo che per la Toscana si diffuse il lume della analitica scienza. Fra Luca nel compendioso quadro, che di sua vita ci porge a p. 67 del suo volume, ci fa sapere, che egli in essa scienza istruito erasi in Venezia sotto la disciplina di Domenico Bragadini, succeduto nella pubblica cattedra al perspicacissimo Paolo della Pergola suo precettore. Era già dunque molto tempo, che in Venezia dettavansi pubbliche lezioni di analisi; e la scienza di essa non erasi nella dominante fermata, ma scorsa era sino all'estremo orientale del dominio; poichè ci narra lo stesso Fra Luca, che andato a Zara, ivi nell' anno 1481 composto avea, e sparso un volume di casi analitici più *sottili e forti*; il che suppone già conosciuta colà l'analisi. Cinque anni avanti un altro volume meno ricco compilato avea ed offerto alla gioventù di Perugia, dove poi a pubblico Maestro scrive che era stato chiamato, e trovavasi l'anno 1487, senza dire, che nuova ne fosse la scuola, ed egli il primo maestro. Un argomento di più ampia diffusione ci porge Fra Luca nell'esporre i varj nomi dati all' arte analitica, dicendo che dal volgo era nominata *la regola o l'arte della cosa*, da altri *arte d'algebra ed almucabala*, da altri *pratica speculativa*, da altri *arte maggiore*. Con quel dire *dal volgo* ci rappresenta lo studio dell'arte della cosa divenuto assai comune. E la varietà stessa de' nomi dimostra l'arte da varj in varj luoghi da lungo tempo coltivata. Tra i varj nomi poi non è maraviglia che quello *dell'arte della cosa* fosse il più volgare, essendo tutt'insieme d'italiano linguaggio, e derivato dal latino nome *res*, da Leonardo assegnato alla quantità sconosciuta, e cercata nel problema. Ma ciò che meglio prova la coltura dell'arte analitica in Italia, ed onora i cultori di lei, si è il trovarla nel volume di Fra Luca paragonato al libro di Leonardo di qualche ramo cresciuta, come a suo luogo farò vedere. Ciò dimostra, che all'apparare la dottrina dall'Oriente trasportata, all'esercitarsi in essa succeduto era in ingegni all'invenzione fatti e spinti lo stimolo, il felice studio di promoverla. Tal fu probabilmente Prosdocimo di Padova, il Beldomando lodato dagli Storici padovani, dal Guarico, dal Volaterrano, tal Biagio di

Parma, il Pelacani sì ammirato nel secolo XIV, sì da tutte le penne magnificato, e con tanta gara dalle Università italiane cercato, e dalla Parigina ancora, siccome narra il diligente e ben assennato Storico parmense Padre Affò. Essi dopo Euclide e Boezio, dopo Leonardo e il Sacrobosco e il Giordano son i due, che Fra Luca nomina quai fonti, dai quali ha cavato in maggior parte il suo volume. E che ne avrà egli cavato, se non quel più, che in Euclide e Boezio, in Leonardo e Sacrobosco e Giordano non ritrovavasi? Non si escludono perciò dall'essere all'accrescimento dell'analisi concorsi altri, de' quali può aver Fra Luca riferite senza nominarli le invenzioni, non sapendo a chi appartenessero.

§. VI. Stagion venne, che l'analisi per l'Italia diffusa ne trascorse i confini, volle più ampia sfera, e per Europa tutta si dilatò, per ogni dove però recando italiane impronte a testimonj, che dall'Italia si era colà trasferita. Tale impronta è il nome *arte della cosa*, dove latinizzato in *ars cossica*, traendone anche per la radice dell'equazione la denominazion *numerus cossicus*; dove convertito nel puro latino *ars rei*; dove al linguaggio del paese accomodato, come fecero i tedeschi Rudolphs e Stifels dicendo *die coss*. Un' altra impronta è il nome di *censo*. È questo nome di origine latino, e latinamente l'adoperò Leonardo scrivendo in latina lingua il suo libro in tempo che la consuetudine in Italia durava di scriver latino. Nè credo abbia potuto intender dell'origine, ma solo della desinenza, o dell'uso, Montucla dicendo (1) essere *censo terme italien qui signifie produit*. E non fu già invenzion di Leonardo chiamare il quadrato *censo*: per l'opposto dal suo scrivere *quadratus qui*

(1) Parte III, lib. III, art. IV.

videlicet census dicitur, si raccoglie, che il nome di *censo* in luogo di quadrato era già usitato, anzi il più usitato presso la latina gente, ad ammaestramento della quale nella piena scienza de' numeri Leonardo scriveva. Or della ragione, e della propagazion tutt'insieme di questo nome si ascolti Bacheto nel suo Comento alla definizione seconda di Diofanto: *Itali Hispanique quadratum vocant censum, quasi dicas redditum proventumque, quod a latere seu radice tanquam a feraci solo quadratus oriatur inde factum est ut Gallorum nonnulli et Germanorum corrupto vocabulo* zenzum *appellarint*. Noi italiani di fatto avendo conservato al latino termine *census*, nel piegarlo a nostra lingua, l'original significato, intendiamo per esso una rendita, un frutto, massimamente di capitale. È naturalissima la spiegazion di Bacheto; e nel latino nome *census*, comune con l'Italia alla Spagna, alla Germania, alla Francia, si vede manifestamente l'impronta, che dalla italiana gente, allorchè latino ancora scriveva, impressa all'analisi si conservò nell'ampia sua diffusione. Più si retrocede a prender gli scrittori esteri di analisi, più puro vi si scorge e schietto l'analitico linguaggio degli antichi italiani. Pretto questo linguaggio ci si offre nel trigonometrico problema di Regiomontano, il più antico estero tratto di analisi, che Montucla abbia saputo additare. Non solo in tal problema, del quale Montucla non segna il luogo, ma è sotto il num. 12 del libro II, non solo il nome *census*, ma anche l'altro *res*, il titolo *ars rei et census*, la espressione *restaurare defectus*, e tutte insomma le maniere, le frasi, il giro tutto de' primitivi analisti italiani, e del padre loro Leonardo dalle posizioni all'ultima equazion del problema, dove poi soggiugne Regiomontano, non propriamente come reca Montucla, *fiat secundum cognita artis praecepta*, ma *quod restat praecepta artis edocebunt*. Ben giustamente adunque si gloria l'Italia d'essere stata delle europee nazioni la prima a conoscere, e coltivar l'analisi, e d'averla alle altre tramandata. E credo, che ora la prova non si restringa all'argomento negativo di non aversi notizia di europeo più antico, che abbia di analisi trattato, di Leonardo. Il ch. abate Andres nel suo quarto tomo, cap. III, getta dei *forse*, dei quali rompe il corso accusandoli d'inutili congetture, ma che pure stimò ben di proporre. *Forse* (dice egli) *quel Giuseppe spagnuolo, la cui aritmetica tanto pregiava Gerberto, avrà eziandio conosciuta l'aritmetica speciosa, come si suole anche chiamare l'algebra. Forse alcuni de' molti libri matematici dell'archivio di Toledo, ne' quali, al dire del Terreros o del Burriel, vedonsi adoperate le cifre arabiche avranno anche trattata l'algebra arabica. Vi si vedevano certo tradotte in latino alcune opere di Tebith ben Corrah, il quale vien riguardato come uno de' padri di tale scienza. Forse Gerberto, che sì misteriosamente parla dell'aritmetica da lui appresa in Ispagna, avrà compreso sotto questo nome anche l'algebra. Forse Giovanni di Siviglia, forse...* Tutti questi *forse* sono a favor della Spagna, e lodar si debbono come effetti di amor nazionale, per cui avrebbe l'eruditissimo Scrittore pur voluto che la Spagna fosse stata la prima in aver lume dell'analisi. E lo sarebbe stata, se conosciuta l'avesse quello spagnuolo Giuseppe, tanto commendato da Gerberto, e questi da' libri di lui apparata l'avesse, e si potesse intender compresa nell'aritmetica misteriosa, della quale Gerberto parla nella sua lettera a Costantino. Ma il libro dello spagnuolo Giuseppe, per ciò che rilevasi dalle lettere di Gerberto stesso a Geraldo abate di Aurillac, ed a Bonfilio vescovo di Girona, di altro non trattava che *de multipli-*

catione et divisione numerorum. La lettera di Gerberto a Costantino altro non suona che moltiplica e division de' numeri; e sebbene in stile misterioso, od oscuro, pure mostra una mente affatto lontana da analisi, non lasciandone intravvedere alcuna rimota relazione; e ciò che sta sotto la lettera, *praecedens epistola praeficitur libello suo de numerorum divisione*, ci spiega ad un tempo il soggetto della misteriosa lettera, e determina l'estension dell'operetta di Gerberto. Poi, lo stesso celeberrimo Storico d'ogni letteratura nel suo primo tomo, pag. 229, non sa persuadersi che Giuseppe spagnuolo, e Gerberto conoscessero le numeriche figure, l'aritmetica computazione degli arabi; e nel capitolo secondo del sopraccitato tomo II fa contro l'argomento avversario a favor di Gerberto tratto dalla sua lettera a Costantino la bella osservazione, che tale lettera riportata fra le gerberziane è quella medesima affatto, che si ritrova nelle opere di Beda al principio del libro *De numerorum divisione ad Constantinum*; per lo che rendesi dubbio se sia da riporsi fra le opere di Gerberto, ovver fra quelle di Beda. Che se non si può credere, che Giuseppe spagnuolo, e Beda conoscessero l'aritmetica degli arabi, e neppur le numeriche figure, come potrassi concepir un *forse*, che conoscessero l'analisi loro, parte la più alta di quella aritmetica? Quanto alle opere di Tebith ben Corrah, che si vedevano in latino tradotte nell'Archivio di Toledo, dato pur che quelle fossero da lui composte su l'algebra, e non piuttosto gli Elementi di Euclide da esso o tradotti o illustrati, bisognerebbe sapere quando quelle stesse furono in Ispagna recate, e quando in latino convertite. L'antichità di Tebith ben Corrah vissuto nel IX secolo non basta ad infingersi antica in Ispagna l'algebra; come dall'esser per l'Italia corsa l'opera di Moamad ben Musa a Tebith anteriore mal inferirebbesi essere stata l'Italia prima, che pel suo Leonardo, spuntato il secolo XIII, dell'algebra arricchita. È però commendevole la modestia dell'abate Andres, il quale a de' *forse* contener seppe l'amor per la sua Spagna, e non lo lasciò correre abbagliato dietro la franchezza del francese Gua-de-Malves, il quale nelle sue Memorie [1] osa asseverantemente dire, cominciando la storia delle regole dell'algebra, *que les arabes et les maures avoient apportées dans l'Espagne, et qui de-là s'étoient répandues dans tout le reste de l'Europe*: con soggiugnere in una nota *je sais néanmoins que quelques auteurs italiens, trop jaloux peut-être de la gloire de leur nation, ont prétendu que Léonard de Pise avoit été s'instruire dans l'Arabie même, et qu'il en avoit apporté immédiatement en Italie l'arithmétique et l'algebre. Cette opinion est sur-tout fondée sur l'autorité de Tartaglia*. Ed anche ciò solo, che questi scrive per comun tradizione, e che il Gua-de-Malves trascrive, dovea ritenerlo dal tacciar qual pretesa mal fondata, e figlia di uno zelo nazionale forse troppo appassionato il vanto degl'italiani, e dal trasferir da essi negli spagnuoli la gloria di contare tra i loro l'immediato discepolo degli arabi, il trapiantator dell'algebra dall' arabe nell'europee contrade. Impose il Gua-de-Malves all' Alembert sì fattamente, che nell'*Enciclopedia* articolo *Algebre* del vanto nostro credette di non dover far parola, ma solo del trasporto per gli arabi in Spagna, e del passaggio quindi secondo alcuni in Inghilterra. Lode in ciò a Montucla, che il nostro diritto, se non pose a piena luce, il riconobbe però, e fu equo.

(1) *Rech. du nombre des racines*, inserita nel vol. dell'Accad. an. 1741.

§. VII. Considerando i passi dell'analisi per l'Italia, non vi si ravvisa certamente quella rapidità di propagazione che meritava, e molto più grande maraviglia reca l'intervallo di due secoli e mezzo da Leonardo a Regiomontano, il primo, che fuori d'Italia ci accenni, e dia a divedere conosciuta l'analisi. Ma bisogna por mente alla condizione di quei secoli ingombrati dalla più barbara ignoranza, e sconvolti da guerre e da fazioni. Inventata peranche non era l'arte della Stampa, quell'arte, che con celerità diffonde le nuove dottrine, moltiplica i lavori degli uomini dotti, e si fa loro potente tutela contro le ingiurie del tempo. Non si può con quella proporzione, che or si terrebbe, argomentare dalle memorie che ci rimangono al numero dei coltivatori in allora dell'analisi. I frutti dei loro studj non erano raccomandati che ad uno scritto, chi non sa quanto facile ad essere disperso e distrutto? In tempi di guerresco furore, di civili rovesci, di languore, e poco apprezzamento delle scienze, chi può dire il numero di analitici scritti che perirono? Nè di quelli, che forse sfuggirono agl'incendj, od altri oltraggi si sono fatte per gli archivj diligenti ricerche. E non sarebbe da stimarsi vana fatica il rintracciarli, a fine di vedere i gradi, per i quali l'analisi è cresciuta. Ai riflessi estrinseci sin qui esposti aggiungiamo i riflessi intrinseci. Era la nuova arte analitica legata ad un nuovo sistema di aritmetica, ed erane la parte più alta; tempo dunque richiedea la sua propagazione. I problemi di lei o versavano specolativamente su' numeri astratti, o riguardavano la geometría pratica. Per il primo oggetto non potea molto interessare in tempo, che gli spiriti erano tanto lontani dal gusto delle aritmetiche verità astratte. Quanto al secondo, confusa in volgare opinione con le altre geometriche pratiche più grossolane, altra considerazion non ottenea che di cosa di arte e mestiere. Mancava all'analisi ne' suoi primordj quel congiungimento, che solo potea renderne rapido il propagamento tra la luce e il grido, il congiungimento con la fisica. A questo congiungimento debbe l'analisi lo splendore, che al presente gode, l'auge di cui esulta, la sublimità, alla quale trovasi sollevata. E si vedrebbe ben presto scemato il numero de' suoi cultori, se dalla fisica venisse a mala sorte disgiunta; che tolto lo sperato compenso del piacere in raggiugnere le cagioni de' naturali stupendi effetti, la sublimità sua stessa non si farebbe sentire che troppo scoscesa e penosa.

§. VIII. Leonardo dice, che a render la piena scienza de' numeri più perfetta, e per ogni parte dimostrata, qualche specolazion vi appose della geometría di Euclide, e qualche cosa pur vi aggiunse del suo. Aggiunse egli cosa alcuna all'analisi delle equazioni, la più nobil parte, e più alta di essa scienza? E qual fu la cosa che vi aggiunse? Noi non possiamo che tirare qualche illazione con paragonare agli scioglimenti di Leonardo quel poco, che tramandato ci fu degli scioglimenti di Moamad. È questi da Cardano accusato di non aver dimostrato che una delle due risoluzioni dell'equazione $x^2+n=px$, e di averla dimostrata oscuramente altrettanto, quanto prolissamente. *Nec admireris demonstrationem aliter quam a Mahumete explicatam, nam ille immutata figura magis ex re ostendit, sed tamen obscurius, nec nisi unam partem, eamque pluribus.* Se lo stesso abbiamo a credere dei maestri arabi tutti, onor sarà di Leonardo aver distinte le due risoluzioni, ed averle ambedue in chiara e spedita maniera dimostrate. La dimostrazione, con la quale Cardano si vanta di supplire alla mancanza di Moamad, è ancor più svelta e concisa di quella di Leonardo, trascritta poi da Fra Luca; ma conviene in essenza, fondasi su lo stesso teorema 5.° dell'Elemento II di Euclide, nè non differisce che per il modo un po' più agile. La sollecitudine di Cardano, che a colpa volto non gli fosse l'essersi dipartito da Moamad appalesa qual grido allor godesse il libro di costui, e in quanto fosse egli rispetto. Era uguale di Leonardo la sorte? Pare, che al contrario il libro di lui fosse divenuto raro, e andato in disuso; poichè anche il Tartaglia sul principio del suo gran trattato accenna di Leonardo i viaggi, il libro, il trasporto dell'aritmetica, dell'algebra, della geometria dall'Arabia in Italia; ma dice tutto ciò essergli stato da altri riferito, siccome pure aver Fra Luca de' fiori del libro di Leonardo tessuta la *Somma* sua. Ma e qual ragione di tanto vantaggio dall'operetta di Moamad preso sopra il libro di Leonardo, se pur era quella a giudizio di Bombelli di poco valore, e per fede di Cardano nell'additato luogo difettosa, di stile prolisso insieme, ed oscuro? Altra non se ne può immaginare che quella di esser Moamad arabo, di esser anzi riputato dell'analisi l'inventore; della quale opinione diremo a suo luogo. Intanto gloria di Leonardo a confronto di Moamad sia l'aver distinte, e dimostrate le due radici dell'equazione $x^2+n=px$. Intorno a che non fu esatto Montucla scrivendo [1]: *Cardan est le premier qui ait apperçu la multiplicité des valeurs de l'inconnue dans les équations, et leurs distinctions en positives et negatives*. Vera la seconda parte, ma non la prima. Si rifletta anzi, che il prender che fece Leonardo in doppio senso il radicale rispetto all'equazione $x^2+n=px$ suggerisce di far lo stesso nello scioglimento

(1) Parte III, lib. III, art. V.

delle altre, e scorge così a ritrovar le radici negative. Se Leonardo non avanzò questo passo, il preparò.

§. IX. Più ancor lontano dal vero è ciò, che il Montucla scrive [1], che la forma usitata sino ad Harriot nelle equazioni, quella si fu di uguagliare *les termes où entre la quantité inconnue à celui qui contient la connue*. No, non fu questa la regola; ma sì quella, che tutti i termini da una e dall'altra parte fossero positivi, mescolando senza differenza veruna il termine libero dalla quantità ignota con quelli di essa involti. Tali sono le tre forme di equazioni di secondo grado costituite da Leonardo; tali le forme di tutte quelle di grado superiore, che noi chiamiamo derivative del secondo, esposte da Fra Luca; tali quelle o incomplete o complete del terzo e del quarto, schierate nella sua *Arte magna* da Cardano. Di tali forme insegnarono con distinte regole lo scioglimento: ad esse, come ad esemplari forme, prescrissero i modi di ridurre le varie equazioni dei particolari problemi; ed esse forme furon quelle da loro dette *Capitoli*, come altrettanti capi di uguaglianze, riservando questo nome alle equazioni singolari dei problemi. Anche questa distinzione fu ommessa da Montucla.

§. X. Ciò, in che il francese Storico delle matematiche osservò giusto, si è l'essere stato dai primi analisti ommesso lo scioglimento della forma di secondo grado $x^2+px+n=0$, e tutte le altre simili di terzo, o quarto, nelle quali cioè tutti i termini positivamente presi si riducono alla stessa parte. Trovasi la ommission dell'accennata forma di secondo grado in Leonardo, ed abbiam fondamento di credere, che fosse pur appresso gli arabi, anzi ne abbiamo una prova ben evidente, riflettendo alla regola di algebra dall'arabo voltata

(1) Parte IV, lib. II, art. II.

per Guglielmo di Lunis, ed usata dal Canacci, ed all'opera di Moamad, che tradotta anch'essa girava sotto gli occhi degli analisti ai giorni di Cardano e di Bombelli. Certamente continuato non sarebbesi ad ommettere lo scioglimento di quella forma, se nelle due arabe opere trovato si fosse. E di leggieri si comprende la cagion dell'ommissione, se pongasi mente al modo, onde Leonardo costituisce le forme delle equazioni, ed al principio che lo dirige; e sarà stato dal primo inventore tenuto il modo stesso, e preso per guida lo stesso principio. Leonardo, distinte le tre cose, numero semplice, radice, censo, le uguaglia primamente ciascuna a ciascuna in tutte le possibili maniere, e ne tira le tre forme semplici; procede ad uguagliare in tutte le diverse combinazioni possibili due qualunque alla terza, e ne cava le tre forme composte. Il principio regolatore e costante si è di uguagliar quantità a quantità; e sotto questo principio, sotto questa idea di uguaglianza non cade la forma $x^2+px+n=0$. Ecco il perchè fu ommessa.

§. XI. Un'altra ommissione, che tacer non si vuole, ed al §. VIII già toccai, di Leonardo, ma degli arabi maestri eziandío, si è il non contar delle forme $x^2+px=n$; $x^2=px+n$ che una sola risoluzione, la positiva, sebbene un'altra ne abbiamo, negativa. Egli è però a riflettersi, che l'aritmetica pura non contempla nel numero, che l'intrinseco suo valore numerico: il positivo, o negativo, sono estrinseche affezioni, son relazioni fuor dell'astratto suo oggetto. Nell' aritmetica pratica, in quisiti di numero di persone, di tempo per un lavoro, di mercedi, di capitale, di frutti, di quantità di mercatanzíe, di prezzi ec. la considerazione del negativo non ha luogo. La geometría e la fisica sono quelle, che scorgono a considerare il positivo, ed il negativo.

Tutte le scienze poi si assomigliano ai grandi fiumi, che se all'origine li vedi, sono scarsi e miti rivi; ma ingrossati nel corso dalle acque, che da ogni parte vi cadono, gli osservi lontano da essa alteri, sonanti, terribili. Così le scienze: nel nascer loro sono tenui difettose dottrine; ma arricchite dagli emuli studj di molti ingegni, si estendono via via, e crescono a piena di luce. Non è dunque da stupirsi delle ommissioni di Leonardo, e degli arabi maestri con lui. Il greco analista Diofanto altresì niun uso fece, niun lume ebbe della forma $x^2+px+n=0$, nè delle radici negative delle due $x^2+px=n$; $x^2=px+n$. Anzi avverto, che ponendo Bacheto nel suo Comento alla quistion XXXIII del libro I a confronto tre sistemi di regole per lo scioglimento delle equazioni di secondo grado; quello, che allora era comune, quello da Pietro Nugnez, o Nonio 57 anni avanti insegnato, e quello dalle quistioni di Diofanto raccolto, tre sole regole di ciascun sistema espone spettanti le tre forme anche da Leonardo sciolte; e le regole tutte, non altrimenti che quelle di Leonardo, si limitano alle positive radici. Veggo, che Bacheto esprime le tre forme tali, quali Leonardo, e dopo lui gli antichi italiani analisti le espressero, tenendo la stessa massima dei termini tutti positivi, e la medesima idea di uguaglianza di positiva a positiva quantità; con la qual massima, e con la qual idea tutt'insieme non si combina, come già sopra fu da me notato, la formola $x^2+px+n=0$. Vieta, anteriore a Bacheto, seguito avea l'idea di uguaglianza di positiva a positiva quantità, non però la massima dei termini tutti nell'uno e nell'altro membro positivi; ma in vece, definita l'equazione *magnitudinis incertae cum certa comparatio*, appigliato si era a quella di separare dai termini contenenti l'incognita il termine noto, collocando quelli tutti, o di positivo, o di negativo segno riuscissero affetti, in un membro, e questo solo nell'altro. È questo il tenore, cui Montucla vedendo nel suo Vieta, trasportò a tutti i tempi addietro sino alla prima epoca dell'analisi. È manifesto, che un tenore sì fatto nel costituire le forme dell'equazioni esclude per doppio verso la forma $x^2+px+n=0$; e Vieta effettivamente non la toccò, anzi espressamente diede a divedere di non averne mai concepito verun fantasima, tre dicendo le formole delle equazioni affette di secondo grado, cioè nello stile di lui: $x^2+px=n$; $x^2-px=n$; $px-x^2=n$. E ben di singolar artifizio si valse egli a scioglierle; ma altre radici egli ancora non trassene che le positive [1]. Nè maggiormente estese i suoi lumi nel trattar le equazioni di secondo grado geometricamente [2]; ciò che qualche maraviglia recar debbe. Maraviglia maggiore è di Harriot, che avendo il primo abbandonata l'originale idea di uguaglianza di positiva a positiva quantità, ed istituito di scriver da una sola parte tutti i termini, ed uguagliare il complesso loro a zero, nel combinare variamente i segni de' termini, tra le possibili combinazioni non abbia ravvisato la $x^2+px+n=0$, che nella general formola $x^2\pm px\pm n=0$ si presenta delle quattro la prima. Nè meglio veggente si dimostrò rispetto alle negative radici delle due forme $x^2+px=n$; $x^2=px+n$. Gloria pertanto di Cardano, che queste distintamente scorger seppe, e conoscere, che la negativa della prima è la positiva della seconda, e viceversa. E Cardano diede in luce la sua *Arte magna* l'anno 1545, anni 19 avanti che il portoghese Nugnez dedicasse al Principe Enrico già suo discepolo il tanto applaudito suo trattato

(1) *Vietae De aequat. emendatione.* (2) *Effect. geom. Can. Rec.*

di algebra, anni soli 5 dopo la nascita del francese Vieta, e 15 avanti quella dell'inglese Harriot, ed anni ben 76 prima che Bacheto, uno dei primi Membri dell'Accademia francese, pubblicasse la sua illustrazion di Diofanto.

§. XII. Curiosità nel leggitor si sarà mossa intorno ai tre sistemi di scioglimenti delle equazioni di secondo grado confrontati da Bacheto, e quello singolare, che da Vieta ho io detto usato. Sarebbe una scortesía non appagare tal curiosità, potendo in poche linee ciò fare. Quelle, che Bacheto chiama regole comuni al suo tempo, sono le regole stesse di Leonardo, comuni altresì a' giorni nostri. Per dare idea delle regole di Pietro Nonio scegliamo ad esempio la equazione $x^2 + n = px$: sarà giusta il metodo di lui $2x = p \pm \sqrt{(p^2 - 4n)}$. Vedesi tosto, che questa soluzione divisa per 2 cade in quella, alla quale noi sovente riduciamo la immediata nostra; onde non vi ha tra il metodo del Nonio e quel di Leonardo considerevol differenza. Piuttosto vi ha tra esso e quello, che da Diofanto in alcune quistioni dei libri IV, V, VI scorgesi adoperato. Sia l'equazione $ax^2 + c = bx$: Diofanto non usa il *parabolismo*, cioè la liberazione del quadrato x^2 dal coeficiente a, ma scioglie l'equazione a dirittura moltiplicando a con c, e facendo le altre operazioni espresse nella formola $x = \frac{\frac{1}{2}b \pm \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - ac)}}{a}$. Essenzialmente da questi metodi differisce l'artifizio di Vieta di ridurre l'equazione affetta ad equazion pura togliendo il secondo termine. Ma questo artifizio di toglier il secondo termine, per il quale Montucla tanta lode a Vieta tributa, io dimostrerò altrove essere d'origine italiano.

CAPO II.

Original significato ed ufficio di algebra.

§. I. Anderebbe di gran lunga errato chi credesse aver algebra in origine avuto quell'ampio significato, che ora gode. Essa non era presso gli antichi propriamente che una delle operazioni da farsi per ridurre la equazion immediata del problema ad una delle semplici forme esemplari dette *capitoli*. Ciascheduna di esse operazioni aveva in arabo il suo distinto nome; ed il Canacci nel suo Ragionamento da me citato §. III del capo I tutti li reca. Ma delle operazioni medesime convien dire, che due si avessero presso i maestri, da' quali Leonardo in Africa apparato avea la dottrina, per precipue; cioè l'algebra, e l'almucabala; poichè queste due sole egli nomina, così dicendo nella enumerazione, ed esposizion delle parti del capo xv: *Tertia erit super modum algebrae et almucabalae*; e così entrando a trattarne, *incipit pars tertia de solutione quarundam quaestionum secundum modum algebrae, et almucabalae, scilicet oppositionis et restaurationis*. Ecco già le spiegazioni dei significati di *algebra*, ed *almucabala*. Ma si presenta una difficoltà. A prendere ordinatamente i nomi, e le spiegazioni, *oppositionis* sarebbe il significato di *algebrae*, e *restaurationis* quello di *almucabalae*. Eppure il Canacci ponendo prima dei sette nomi arabici delle operazioni analitiche *geber*, soggiugne, che da Guglielmo di Lunis è interpretato *recuperamento*. E Fra Luca, che tanto confessa d'aver da Leonardo tolto, alla pagina 144 esultando di esser giunto alla dal volgo detta *Regola della cosa*, ovver *Arte maggiore*, cioè pratica specolativa, prosegue: *altramente chiamata algebra et almucabala in lingua araba, ovver caldea secondo alcuni, che in la nostra sona quanto che a dire* restaurationis et oppositionis. *Algebra idest* restauratio. *Almucabala, idest* oppositio, vel cōtēptio et solidatio. Ho voluto per meglio accertarmi della precisa origine dei nomi, e della giusta corrispondenza delle interpretazioni consultare il prestante mio collega ed amico il signor abate De-Rossi, celebre ugualmente e per l'incomparabil tesoro di codici, massimamente biblici, che possiede, e per quello della vasta dottrina nelle orientali lingue. Ecco le etimologie da lui raccoltemi:

Giabera vel *Giavera*, radice araba, che significa *religavit, consolidavit, integritati reddidit fractum*. Golio, e Castelli *Lex. Eptagl.*

Giavaron, apud mathematicos reductio partium ad totum, seu fractionum ad integritatem, et hinc algebra nomen habet. Gli stessi.

Mokbal vel *Mukbal*, radice araba, significante *e regione situs*.

Mokabalad, vel *Mukabalath, oppositio*. Avicenna, *item comparatio, collatio*. Golio e Castelli.

Akbala, chaldaice *contrarietas, oppositio*. *Lex. Chald. Buxtorfii*.

Si derivi dunque da araba, o da caldea radice il nome *almucabala*, cosa indubitata si è, che *oppositio* è la significazion sua, e *restauratio*, o *solidatio* è quella che appartiene ad *algebra*, nome unicamente arabo. L'abbreviatura *cōtēptio*, che trovasi nel testo di Fra Luca, non appare in qual parola rilevar si possa, la qual abbia relazione ad algebra, od almucabala; ed io la reputo un errore di stampa in luogo di *comp̄tio*, abbreviatura di *comparatio*. Nè debbe poi crear difficoltà, che, usato prima quest'ordine, *alge-*

bra, *restauratio; almucabala*, *oppositio*, con contrario ordine disponga Fra Luca i nuovi significati, vel *comparatio et solidatio*: ha voluto con l'*oppositio* attaccare il sostituito *comparatio*, e quasi, dirò così, per circolo tornare con il *solidatio* al più distante *restauratio*. E per simil tenore è da giudicarsi, che Leonardo congiungesse la prima parte della interpretazione *oppositionis* con il nome *almucabale* ultimamente posto, e la seconda parte *restaurationis* retrocedendo rapportasse ad *algebrae* collocato in prima. Non ommetterò di notare, che in vece di *oppositionis*, che leggesi nel codice Magliabecchiano da me visitato, ed in uno imperfetto posseduto dall'erudito e cospicuo cavaliere Nelli, un altro esistente nella Magliabecchiana biblioteca, ha, come scrivemi il chiar. P. Canovai, *proportionis*, e quello della Riccardiana mi fa sapere il dottissimo bibliotecario abate Fontani avere *scilicet ad proportionem et restaurationem*. La diversità di questo ultimo modo di dire non può stimarsi del copista errore, ma espressa di lui licenza, se non fu cangiamento dell'autore stesso in rifare il suo libro; ma questa diversità poco monta. Quanto alla diversità, che appare tra il termine *oppositionis* ed il termine *proportionis*, si ponga mente che gli antichi dietro Euclide usavano il vocabolo *proporzione* nel senso che noi quello di ragione. Con ciò si vede come il termine *proporzione* si tocchi con il termine *comparazione*, ed anche come avvicinar si potrebbe a quello di *opposizione*. Io però, su l'autorità di Fra Luca, dei due termini stimo l'*oppositionis* il solo legittimo.

§. II. Montucla [1] scrive: *Lucas de Burgo qui ayant puisé ses lumieres chez les arabes*, *est fort croyable à cet égard:*

---

(1) Parte II, lib. I, art. IX, pag. 367.

nous donne la vraie origine du mot algebre. Il vient, dit-il, des mots Aljabar v'almucabala, *ce qui en langue arabe signifie* opposition *et* restitution, *des deux racines* Gebera (opposuit) *et* cabala (restituit). Quanti errori qui addensati, Dio buono! Primieramente il rovescio delle interpretazioni *opposuit*, *restituit*. In 2.° luogo quanto lontano dal vero il dire a Fra Luca apposto! E dove mai deriva egli la voce *algebra* confusamente dalle due *Aljabar v'almucabala*, se all'incontro in apertissimo modo distingue *algebra* da *almucabala*, e loro diverso significato attribuisce, e non solo nel tratto addotto, ma e alla pag. 67, ed alla 148, e dappertutto, costantemente scrivendo *algebrae et almucabalae, hoc est restaurationis et oppositionis*? Per 3.° si è veduto, che Fra Luca, lungi dal decidere, che *algebra* ed *almucabala* sieno di araba origine, lascia in dubbio, se d'araba piuttosto sieno, ovver caldea. 4.° Falso, che Fra Luca avesse presso gli arabi acquistato i suoi lumi, o, come più espressamente Montucla replica a pag. 368, da essi apparato tutto ciò che in algebra sapeva, e perciò gli si debba fede singolare. Leonardo non aveva egli per avviso di Montucla stesso trapiantato già dall'Oriente in Italia l'algebra? Del libro di lui dice ingenuamente Fra Luca, che si era approfittato. Rappresenta volgar divenuta già già in Italia la *Regola della cosa*, o sia l'*Arte maggiore*. Del suo viaggio in Arabia, del suo ammaestramento dagli arabi niun cenno, neppur dove in compendio il quadro offre di sua vita, de' suoi viaggi.

§. III. Ma e che cosa è questa *restaurazione* per il nome di *algebra* significata? Chiaro lo spiega Fra Luca alla pag. 148 e seguenti. Dopo esposte sotto il titolo di *capitoli* le sei esemplari forme di equazioni, già da Leonardo costituite, e dietro ad esso prescritte le regole per isciogliere-le, soggiugne quattro *essenziali notandi*, il primo de' quali versa su l'industria del porre il quesito in equazione; nel secondo dichiara l'operar su di essa per algebra, cioè *restaurazione*, e per almucabala, cioè *opposizione*. Il comune oggetto dell'operar loro è *recare la equazione alla sua maggior unità*. Gli uffizj loro per questo comune intento sono contrarj: quello dell'algebra è di *ristorare li extremi dei diminuti*; e quello di almucabala *di levare da li extremi i superflui*. Intende Fra Luca per *extremi* i membri dell'equazione. Bisogna risovvenirsi, che nelle forme esemplari ogni termine nell'uno e nell'altro membro è positivo. Sia pertanto $4x^2 + 6x - 8 = 2x^2 - 3x + 12$ l'equazion di un problema. Tre sono in essa le spezie di quantità: numero noto, radice sconosciuta, e quadrato di essa. Nella forma esemplare $x^2 + px = N$ ciascuna spezie è in unità, cioè ad un termine ristretta. Nella equazion del problema per l'opposto ciascheduna spezie è, dirò così, espansa in due termini: è mestieri ridurre ciascheduna ad unità, ciaschedun dei due membri a soli termini positivi, l'equazion tutta alla semplicissima esemplar forma. Nel primo membro vi è il termine sottrattivo -8, che lo diminuisce; è uopo ristorarlo di tale diminuimento: questo è ciò, che prestar debbe l'algebra conducendo ad un tempo all'unità i due termini di numero. Similmente il secondo membro soffrendo diminuimento dal termine sottrattivo $-3x$, all'algebra si appartiene ristorarnelo, ed insiememente all'unità condurre i due termini della ignota radice x. Ambedue i membri ridondano rispetto al quadrato della ignota radice; è necessità togliere questa ridondanza opponendo al numero superfluo de' quadrati un numero uguale capace a distruggerlo, ed a condurre anche la terza spezie di quantità, il quadrato dell' ignota radice di due in un membro, di due in un termine: questo distruggimento di ridondanza, di superfluità è ciò, che è proprio dell'almucabala, e che essa adempie. Passando Fra Luca a mostrare i fondamenti dell'algebra e dell' almucabala, ne dice essere quelle *verità di comune scienza: Si aequalibus aequalia addas, tota sunt aequalia: Si ab aequalibus aequalia auferas, quae restant sunt aequalia*. Questi fondamenti dell'algebra, e dell'almucabala siccome ne additano chiaro le operazioni, così ne segnano altrettanto chiaro i limiti. Oltra tutto ciò confronta Fra Luca le regole di ristaurazione od algebra, e di opposizione od almucabala con le regole delle false posizioni, ed avverte, che quella di algebra corrisponde a quella delle false posizioni nel caso degli errori contrarj, e quella di almucabala a quella delle false posizioni nel caso di errori simili; e che la differenza consiste in versar le regole delle false posizioni su errori, per i quali indirettamente si giugne alla verità; e quelle di algebra ed almucabala su equazioni che rettamente vi conducono. Da tal confronto si confermano i genuini antichi sensi, le originali funzioni di algebra ed almucabala. Non tralascia Fra Luca di spiegare negli altri suoi *essenziali notandi* distintamente tutte le altre analitiche operazioni: l'arte di porre, il ridurre due equazioni ed ignote quantità ad una equazione una ignota quantità, il trasportar questa da denominatore in assoluto stato, lo spogliarne di qualunque fattore il quadrato, lo svilupparla eziandío se involta in radicali o semplici od iterati. Pure ripete, che la pratica di cose e censi, preferita a quella delle altre, tutte la considerazione delle due industrie per ristaurazion ed opposizione, detta era *Arte di algebra ed almucabala; hoc est restaurationis et oppositionis, perchè sempre in lei bisogna ora restaurare, ora levare superflui da li extremi*.

§. IV. Montucla a comprovar la giustezza dei due diversissimi significati, a dir suo da Fra Luca, ma in verità da lui per la prima volta composti nella voce *algebra*, soggiugne: *On oppose, on compare en effet dans l'algebre deux grandeurs, en faisant ce que nous nommons une équation; et après cette analyse, qui démembre en quelque sorte la question, on la rétablit en entier; ce qui est la preuve de la justesse de la solution.* Cresce l'errore, quanto più si accresce il ministero di algebra, e più lontan si dilata da' suoi limiti, attribuendole tutto ciò che forma l'analisi intera, anzi la prova ancora di essa; quando in realtà non ne è che una parte, una operazione. Peggio, *ces mots* (prosegue Montucla) Gebera, Cabala *peuvent encore signifier par cette raison* analyse *et* synthese*; ce qui convient fort bien à l'algebre, quoiqu'il soit plus ordinaire de l'employer dans les resolutions analytiques.* Chi mai può ravvisare nei due termini *restituit*, *opposuit* l'analisi, e la sintesi? E se pur riuscisse di tirar quei termini a tali idee, quanto lungi si recherebbero dagli originali sensi, ne' quali dagli antichi analisti usati furono? Speciosa poi è la conferma, che di ciò Montucla soggiugne: *Le nom, que quelques-uns des premiers analistes italiens donnerent à l'algebre, confirme encore cette étymologie. Je remarque en effet qu'il y en eut qui nommerent cet art* Almucabale, *et l'on voit cette dénomination dans quelques écrits de Cardan. Mais après bien de vicissitudes et de changemens des noms celui d'algebre est le seul qui soit resté en usage.* Io non so vedere come le vicende dell'uso dei nomi *algebra*, ed *almucabala* forniscano la ragione di riguardar l'almucabala come una denominazione dell'algebra, e la conferma di comprender l'algebra in sè sola tutt'insieme per virtù di sua etimologia i due concetti di *analisi* e di *sintesi*. E poichè Montucla opportuna me ne porge occasione, dirò de' varj nomi dati all'analisi delle equazioni, e delle vicende loro. Si è veduto che Leonardo la chiamò *il modo di algebra ed almucabala*, denominando il tutto da due parti, siccome le più frequenti, così precipuamente considerate, come osservato venne da Fra Luca. Similmente che da due parti, si credette di poter denominare il tutto da una parte sola. Più comunemente fu a ciò scelta l'algebra, e la denominazione dell'analisi per essa sola trovasi antica; poichè il Canacci nel secolo XIV intitola il suo ragionamento di *algebra*, e *regola di algebra* la regola di sciogliier le equazioni, da Guglielmo di Lunis tradotta dall' arabo. E Fra Luca, sebben dica sempre congiuntamente *arte di algebra ed almucabala* esponendo i nomi all'arte dati, o di essa parlando, e trattando di proposito, pure si fa lecito denominar *algebratici* i gradi del numero ignoto, ed i termini *più* e *meno*, intitolar di algebra le operazioni stesse dell'analisi, ed usar nella geometría la citazione *per viam algebrae*. Tartaglia dice, che l'arabo nome era di *algebra* ed *almucabala*; ma tosto si permette egli di accorciarlo ad algebra. Se fuvvi intanto, cui piacque preferir il nome di *almucabala*, ed in essa trasferire il vanto di denominar l'arte intera, non ebbe sorte. Corser bensì le denominazioni di *arte della cosa*, o di *cosa e censi*, e di *arte maggiore*; e Fra Luca ci fa sapere, che queste erano a' suoi giorni le denominazioni più comuni e volgari; e ben a ragione essendo più generali, siccome quelle, che invece di esser tolte da una o due parti dell'arte, tolte sono dal soggetto di essa, o dalla superiorità sua alle altre arti aritmetiche. A Cardano, in aggiungere alla primitiva analisi di secondo grado le nuove di terzo e quarto, piacque di esprimer in un modo più assoluto la grandezza, l'eccellenza dell'arte, dandole l'epiteto di *magna*, e ci dice *Ars quam nos magnam vocamus a nobis inventa editaque algebraticam alii dixerunt*. Sperava egli, e a diritto potea sperare, che il nome di *Arte magna* guadagnasse sopra quello di *Algebratica* la preferenza. Ciò nulladimeno in succeder di tempo il nome di algebra prevalse, e rapì a tutti gli altri la palma, anzi cader li fece in obblivione. Dall'esposto s'intenderà fallar anche il Clavio cap. I *De algebrae inventione ac nomine*, dicendo, che l'arte maggiore fu da alcuni chiamata algebra, da altri almucabala; ma che *postremum factum est, ut geminatis nominibus algebram, et almucabalam aliqui vocaverint, quod scilicet tum per restaurationem, tum per oppositionem quaestiones omnes expediat*. Nè solo è falso essersi i nomi di algebra e di almucabala usati prima congiunti, poi disgiunti, ma è altresì falso, che l'arte maggiore *per restaurationem et oppositionem*, stando almeno agli originali sensi, *quaestiones omnes expediat*.

§. V. Prese a discuter la quistione dell'original significato di algebra anche Alembert nella *Enciclopedia*; e riferendo primieramente l'etimologia per Menagio assegnata dall'arabo *Algiabarat, qui signifie le rétablissement d'une chose rompue*, condanna quel Filologo così: *Supposant faussement que la principale partie de l'algebre consiste dans la considération des nombres rompus*; e segue a dire, che *ne vaut guere mieux* il derivar che fecer altri il nome algebra dal congiungimento della particella *al*, e dalla voce *geber, purement arabe, qui signifie proprement reduction des nombres rompus en nombres entiers*. Anzi, dico io, questa seconda derivazione, presa qual si dà, porta in algebra un senso più espressamente improprio che la prima. Mi spiego: io prevaluto mi sono dell'autorità dei Lessicisti per distinguer qual dei due significati, di *ristaurazione*, e di *opposizione*, fosse quello conveniente ad algebra, e qual quello conveniente ad almucabala; ma io debbo osservare, che nel riferir la ristaurazione alle frazioni, e nel dar questa per il significato e l'ufficio di algebra, si permisero un passo senza ben penetrare lo spirito analitico di ristaurazione e la relazion sua vera. *Algebra* significa *ristaurazione*, non però delle frazioni, ma sì dei membri dell'equazione diminuiti dai termini sottrattivi, che hanno. Anche la sottrazione cagiona una spezie di rottura; e perciò l'etimología recata da Menagio, che in generale offre al pensiero il ristabilimento di una cosa rotta, si può, tanto quanto, applicare convenientemente all'algebra, intendendo per la cosa rotta il membro dell'equazione in certo modo rotto per sottrazione. Ma le altre etimologíe, che espressamente alle frazióni rapportano la ristaurazione, per questo rapporto appunto lungi ne vanno dal vero analitico significato di algebra. Forse parrebbe all'Alembert troppo limitato il concetto di algebra in quanto ristaurazione del diminuimento, che i membri dell'equazione soffrono per i termini sottrattivi; non altrimenti che troppo limitato gli parve in quanto ristaurazione delle frazioni, o sia riduzione di esse in interi. Io gli accorderei l'infinita differenza tra quel limitatissimo originale concetto, e l'immensa estension del concetto di algebra in oggi; ma ciò è avvenuto, perchè di una parte, con nominarne il tutto, se ne è fatto il tutto medesimo, il quale dalla virtù degl'ingegni più grandi si è continuamente arricchito, sparso di nuova luce, ed a maggior altezza sollevato. Ciò che osserva Alembert, *que les arabes ne se servent jamais du mot algebre seul pour exprimer ce que nous* *entendons aujourd'hui par ce mot; mais ils y ajoutent toujours le mot macabelah, qui signifie opposition et comparaison*, dimostra, che Leonardo seguì gli arabi, ed il costume lor tenne, e conferma ciò che contro il Clavio io ho detto.

§. VI. Espone Alembert in secondo luogo l'opinion di coloro, che contro Herbelot pensano, che l'algebra preso abbia il suo nome da *Geber* (presso gli arabi *Giabert*) filosofo, chimico, matematico insigne, essolui credendo dell' algebraica scienza l'inventore. Non è di questi ultimi secoli tale opinione: io la trovo riferita nel più volte citato ragionamento di Canacci, scritto nel secolo XIV; ma la veggo altresì in due parole confutata, osservando con l'autorità di Leonardo, che algebra è una regola di operare. In conto di favola si ha molto più ad avere ciò, che Alembert narra essere stato da alcuni spacciato, che il nome di *algebra* venga da *gefr*, spezie di libro fatto di pelle di cammello, sul quale *Alì*, e *Giafur Sadek* scrissero in caratteri mistici il destino del maomettismo, e li grandi avvenimenti sino al finire del mondo. Una relazione con queste misteriose imposture qual turpitudin sarebbe per una scienza di schietta luce e verità?

§. VII. Non sa il d'Alembert approvare la definizione, che alcuni autori danno dell'algebra, dicendola l'arte di risolvere i problemi matematici: *C'est-là l'idée de l'analyse ou de l'art analytique plutôt que de l'algebre. En effet l'algebre a proprement deux parties: 1.° la méthode de calculer les grandeurs en les représentant par les lettres de l'alphabet: 2.° la maniere de se servir de ce calcul pour la solution des problemes*. Rimontando però addietro, quegli autori avrebbero diritto di sostener la definizion loro, essendosi dimostrato essere stata in origine l'algebra una parte dell'analisi, poi questa essersi da essa, come il tutto dalla parte, denominata. Fra quegli autori è il Wolfio, il quale tutto a rovescio di Alembert dona ad analisi la comprensione, che questi dona ad algebra, ed impone all'algebra l'assoggettamento, che Alembert impone all'analisi. Taluno distribuì ad algebra ed analisi le due parti da Alembert distinte; ad algebra la prima, ad analisi la seconda. Chi l'algebra, e chi l'analisi costituì a tutto, senza far l'una membro dell'altra. Stabilito il sistema di esprimer le quantità per lettere, e le operazioni per segni, era pur conveniente il nome di *aritmetica speciosa*, e più significante, più bello ancora quello di *aritmetica universale* usato dal Newton! Gli antichi, la cui analisi era numerica, la facean parte della loro aritmetica numerica. Se noi non disdegnassimo di seguire il tenor loro, dovremmo *aritmetica universale* intitolare l'arte del calcolo letterale, e di essa far parte la letteral nostra analisi.

§. VIII. È egli possibile conservando ad algebra in qualche modo l'original arabo suo significato conciliar con esso il vasto odierno concetto di algebra? Egli è possibilissimo, sol che, quanto fa mestieri, si estenda l'idea di *ristaurazione*, o *ristabilimento*. Tutto il calcolo algebraico tende all'invenzione di una cosa, o quantità alterata in sè stessa per elevazion a potenza, per estrazion di radice, per iscioglimento nelle sue o finite, o infinitesime variazioni, ed involta in cento maniere con altre quantità: il ristaurarla da tali alterazioni, da tali involgimenti, il ristabilirla nella sua semplicità, libertà, interezza e confronto, in uguaglianza a quantità note, è l'oggetto del calcolo. Questa idea di restaurazione o ristabilimento è sì ampia, che ben si confà con il vasto odierno concetto di algebra.

CAPO III.

Analisi speciosa lineare. Passi alla speciosa letterale.

§. I. Targion Tozzetti dando nel tomo II de' suoi Viaggi un succinto ragguaglio di uno de' due Magliabecchiani codici dell'abbaco di Leonardo, da lui veduto, afferma, che vi si trovano le quantità espresse per le piccole lettere dell' alfabeto; e la cosa stessa su la fede del Tozzetti fu ripetuta dal Tiraboschi (1). Se fosse ciò vero, si avrebbe nel libro di Leonardo il principio della vera speciosa analisi letterale; ma a dire ingenuo le lettere non son ivi solitarie, ed in quel senso astratto, nel quale noi le adoperiamo, ma riferite ed annesse alle linee. Nei problemi massimamente che richieggono un po' più lungo giro di calcolo, rappresenta Leonardo la cosa cercata, *ut ad oculum clarius videatur*, per una linea segnata con una piccola lettera, e similmente per linee rappresenta il numero dato, e gli effetti delle operazioni su di esso ingiunte per le condizioni del problema, ed intorno a tali rappresentazioni lineari ragionando e calcolando riduce al conveniente *capitolo*, ed a scioglimento l'equazione. Se ne vede l'esempio nel primo problema a questo fine da me recato nel capo I. Si può dire, a mio avviso, il metodo di Leonardo una sorta di *analisi speciosa lineare*; e se resta ne' pregi, e ne' vantaggi inferiore alla *speciosa analisi letterale* odierna, riesce certamente superiore di molto ad una semplice *analisi numerica*, prestando ajuto alla fantasía, spargendo lume sul computo,

(1) *Storia Letter. d'Ital.* tomo IV.

e dandogli una certa generalità. Le rappresentazioni delle note ed ignote quantità per linee sono simboli indeterminati, il calcolo su di essi guidato partecipa della indeterminata estension loro; ancorchè di mano in mano applicando si vada ai numeri proposti, ai quali le linee sostituite furono, comprendesi tuttavía, che ugualmente ad altri dati numeri qualunque applicherebbesi; che anzi senza numerica applicazione veruna su le linee assolutamente continuar si potrebbe; e così, se non è generale il processo, ne è generale lo spirito; se si particolarizza l'atto, non lascia d'esserne assoluta la virtù.

§. II. Non mancano però avanti Vieta espressioni di quantità per lettere solitarie, semi, ed esempj veri di speciosa letteral aritmetica. E coglierò, giacchè sì opportuna e spontanea mi si presenta, l'occasione di esporre i gradi, per i quali ad essa si giunse. Ma prima ascoltisi Montucla, che se è inesatto, anzi difettoso in tale storia, è assai eloquente in esaltare i pregi della speciosa letteral analisi, per modo di far conoscere quant'ella meriti una esposizion più accurata di ciò, che la preparò, del suo nascere, e del crescer suo. Così pertanto egli nella parte III, libro III, art. VI: *On doit à Viete d'avoir établi l'usage des lettres pour designer non seulement les quantités inconnues, mais même celles qui sont connues. A l'égard de la coutume de se servir de lettres pour les premieres au lieu des signes usités par les italiens, les allemands, et les hollandois, je remarque que Bateon en est le premier auteur. Viete y ajouta l'invention de se servir des lettres pour les quantités connues; ce qui fit donner à son algebre le nom de* specieuse, *nom qu'elle garde long-tems à cause que tout y est représenté par des symboles. Ce changement que Viete fit à la méthode ordinaire, pa-*

roîtra peut-être assez indifférent à ceux qui connoissent peu l'algebre; mais ceux qui sont versés dans l'analyse en porteront un autre jugement. En effet, cette méthode est d'abord utile en ce qu'elle fournit dans tous les cas des solutions générales, où l'ancienne n'en donnoit que des particulieres. Lorsqu'on n'employoit que des nombres pour désigner les quantités connues, ces nombres se confondant ensemble, il ne restoit plus aucune trace des progrès de l'opération. Dans la nouvelle méthode de Viete au contraire la quantité inconnue étant dégagée et egalée aux quantités connues, on a, comme dans un tableau, toutes les opérations qu'il faut faire sur les donnés de la question pour parvenir à sa solution. Un autre avantage, plus estimable encore, est la facilité qu'elle procure de pénétrer dans la nature et la composition des équations: c'est, nous l'osons dire, à ce changement que l'algebre est redevable d'une grande partie de ses progrès. Bell'elogio giustissimo dell'aritmetica letterale! E non potea non essere animata l'eloquenza, dove con la verità dei pregi più eccelsi della scienza concorreva l'ardor più grande per la gloria della nazione, su la quale, giusta le premesse storiche di Montucla, l'encomio si riverberava. Quale però stato sia il vero preciso merito di Bateone e di Vieta apparirà dalla storia che vo a tessere. E non dispiacerà, che a renderla più compiuta la prenda da lontano.

§. III. Davide Gregori nella prefazione alla studiatissima e magnifica edizion sua delle opere tutte, ch'egli giudicò restarci di Euclide, venuto a parlare del libro quinto, e dei libri settimo, ottavo, e nono degli Elementi, dice: *In libro quinto quantitates literis designatae non magis debent esse lineae, quam aliae quaevis magnitudines. Consuetudini tamen gerentes morem rectas in schemate descripsimus, utpote* *imaginationi maxime accommodatas. In libro septimo, octavo, nono nulla debent esse schemata; litterae enim non determinatos numeros designant, sed quosvis in certis conditionibus.* Risolvendo nel suo ultimo senso questo dire di Gregori, Euclide nel quinto libro ha dettato una generica dottrina delle proporzioni tra quantità di qualunque sorta in astratte spezie letterali, le quali per solo comodo della immaginazione dichiara l'inglese geometra di aver convertite in lineari, aggiunte le linee; e nei libri settimo, ottavo, nono ha Euclide in astratte letterali spezie esposto una dottrina aritmetica. Convengono con Gregori, rispetto al generale oggetto del libro quinto il greco Teone, Commandino, che dello scolio di lui fa la via ad esso libro quinto, e Fra Luca sul principio della sua distinzione sesta. Ma fu di opposto avviso Tartaglia, accusando il Campano, che traducendo dalle versioni arabe adoperò ad ogni proposizione del quinto libro il nome *quantitas*: *nome generale*, dice Tartaglia, *per il qual se intende ogni spezie di quantità, o sia continua, ovver discreta*; e lodando Bartolommeo Zamberti, che voltando dall'original greco di Euclide usò costantemente il nome *magnitudo*: *nome speciale, il quale se aspetta solamente alla quantità continua*: persuaso essendo Tartaglia, che *tutto quello, che Euclide propone nel quinto libro, lo propone semplicemente per le quantità continue;* perchè *se ciò non fusse, superflue serieno state molte proposizioni, che ha proposte, ovver replicate nel settimo*. Nel greco testo di Euclide trovasi diffatto μεγεθος, al qual corrisponde in latino *magnitudo*. Così non solo voltò Zamberti, ma voltaron del pari Commandino, e Gregori, quantunque con Teone intendessero contemplarsi da Euclide in genere qualunque sorta di quantità. Dalla distinzione per Tartaglia assegnata tra i nomi *quantitas*, e *magnitudo* od in italiano, come egli scrive, quantità, e grandezza possiamo solo imparare qual fosse il concepire di lui, od il concepire dei geometri di quel tempo. Ma non vi era ragione di trasferir lo stesso limitato concetto di grandezza in Euclide. Il riflesso di Tartaglia, che altrimenti avrebbe Euclide nel settimo libro superfluamente ripetute di molte proposizioni, non ha valore. Non potè il greco geometra ed aritmetico tutt'insieme discendere, ed applicar in particolare ai numeri nel settimo libro ciò, che in genere insegnato avea nel quinto? Che se pur si concedesse limitarsi il quinto libro alla considerazione delle quantità continue, siccome però abbraccierebbe ugualmente, al notar dello stesso Clavio seguente il Tartaglia, le linee, le superficie, i solidi; così null'altro ne proverrebbe, fuorchè aver in esso Euclide spiegato una dottrina di ogni sorta di quantità continua in astratte spezie letterali; ed aggiunte le linee, queste stesse sarebbero spezie astratte, non avendo rapporto alle superficie od ai solidi una rappresentazion propria, ma solo di arbitraria istituzione, di convenuta immagine, non dell'assoluto e vero essere delle due quantità paragonate, ma del relativo loro valore. Differisce Tartaglia dal Gregori, dal Commandino, da Teone anche in questo, che nei libri settimo, ottavo, e nono fa universalmente uso di schemi disegnando all'occhio con rette i numeri, nientemeno che nel quinto le quantità continue. Un timido ossequio in me creano le autorità di Teone, di Commandin, di Gregori; ciononostante non voglio ommettere di esporre con libertà ed ingenuità due osservazioni, almeno al fine, che non servano d'inciampo, e prevenuto resti un obbietto di chi le facesse, com'io le ho fatte. Osservo 1.° che sebbene per lo più a dinotar nel libro quinto una grandezza, e nei libri settimo, ottavo, e nono un numero usi Euclide una semplice lettera, talvolta però ne usa due: osservo per 2.°, che ciò fa qualora o la grandezza, o il numero per condizion del teorema debbe nel corso della dimostrazione soffrir qualche partimento. Pare, che con le due lettere abbia voluto segnare gli estremi di una retta; onde sembra che alcune proposizioni e del libro quinto, e dei libri settimo, ottavo e nono non possano stare senza lineari schemi, e giusta la mente dello stesso Euclide sieno verità intorno a grandezze, o numeri sotto astratte spezie lineari. Ma anche ciò ammesso riman soddisfatto il mio intento. Insomma per quanto si usi di ristringimento non si può negare, che il libro quinto degli Elementi sia per la massima sua parte un modello da Euclide dato di generica, o geometrica, se si vuole, dottrina in astratte spezie letterali, e che i libri settimo, ottavo e nono sieno un simile modello di astratte letterali spezie di dottrina aritmetica. Euclide adoperò le lettere greche maggiori, ed a buon senno; perchè non essendo, tranne sei, note di numeri determinati, come lo erano tutte le piccole, erano idonee alla representazione indeterminata. Campano in tradurre dall'arabo si servì delle piccole lettere latine. Dal greco originale voltando Commandino e Gregori, l'uno sostituì alle lettere greche maggiori le maggiori latine, l'altro quelle serbò.

§. IV. E di analisi speciosa si ha egli esempio o seme nella greca antichità? Sì, che si ha in Diofanto. Nella definizion sua II dopo aver esposta la scala e la genesi dei gradi analitici: quadrato, cui ama egli chiamar Dynamis, cubo, quadrato-quadrato, quadrato-cubo .... ed avere a note loro assegnate le abbreviature δ^{υ}, $\varkappa^{\upsilon}$. $\delta\delta^{\upsilon}$, $\delta\varkappa^{\upsilon}$ ....

prosegue, al tradur di Bacheto, *Cujus vero nulla harum proprietatum obtigit, sed constat multitudine unitatum rationis experte numerus vocatur: nota ejus ς̀. Est et aliud signum definitorum, unitas, cujus nota μ̀ superscriptum habens ὸ sic* $\overset{o}{\mu}$. Su la qual definizione il profondo comentator di Diofanto, Bacheto medesimo, entrando ad interpretare, *Haec* (dice) *ad verbum exprimenda esse arbitratus sum potius quam cum Xilandro nescio quid aliud comminisci . . . . Porro quadratum dynamin vocat, quae vox potestatem sonat, quia videlicet quadratus est veluti potestas cujuslibet lineae, et passim ab Euclide per id, quod potest linea, quadratus designatur. Itali hispanique eadem fere de causa censum vocant, quasi . . . . Numerum autem indeterminatum et ignotum, qui et aliarum omnium potestatum latus esse intelligitur numerum simpliciter Diophantus appellat . . . . quemque statim opponit ωριαμιω seu unitatibus certis et determinatis*. Scorrendo infatti i Diofantei problemi si vede, che ai numeri dati aggiugne sempre Diofanto il titolo *μοναδες*, o l'abbreviatura $\overset{o}{\mu}$, e rispetto al numero ignoto e cercato, o lo denomina conformemente alla distinzione nella definizion assegnatagli *αριθμον*, *numero*, o lo indica con la nota stabilitagli ς̀. Di questa però varia egli con varj accidenti la forma: la usa egli semplice, se il numero sconosciuto non sia per noto numero moltiplicato, e la raddoppia legando i due sigma con un accento circonflesso ad essi sovrapposto se il numero incognito venga da un dato numero moltiplicato; declina egli inoltre e la semplice e l'addoppiata nota come un nome, e le affigge alla superior parte del destro lato la desinenza del caso, che l'orazion porta di dare al numero ignoto, quando sia caso obbliquo. Questa varietà sarebbe stata senza bisogno, se fosse vero ciò, che insegnano Enrico Stefano nell'*App. libell. ad Thes. linguae Graecae pertinentium*, illustrando il pezzo di Erodiano su le note numeriche dei greci, ed i dotti di Porto-Reale nella greca lor grammatica, e gli altri greci grammatici comunemente: cioè, che i greci usando le piccole lettere dell'alfabeto loro a note de' numeri, le distinguevano di un acuto accento, il quale alla superior parte del destro lato ponevano volendo significar unità, decine, centinaja, ed abbassavano all'inferior parte del sinistro lato significar volendo migliaja. Posto ciò la nota ς̀ assegnata da Diofanto all'ignoto numero sarebbe stata bastantemente differente dall'ordinaria nota ς' del numero 6 per la qualità dell'accento, grave in quella, acuto in questa, senza pericolo di confonder i significati dell'una e dell'altra, quand'anche si trovassero insieme congiunte. Ma un aggiunto, qualunque si fosse, alla nota ς̀ per significar l'ignoto numero era ben necessario nel greco testo di Diofanto, dove il numero 6 è dinotato per ς̀, con accento grave, non con acuto. E generalmente in esso testo, che la latina versione, ed il comento di Bacheto precede, sia nell'edizion di Parigi l'anno 1621, sia in quella arricchita delle osservazioni di Fermat in Tolosa l'anno 1670, si osserva che le letterali note delle unità, delle decine, delle centinaja portano al destro lato sovrapposto non già l'acuto, ma il grave accento, e sottoposto il tengono al sinistro quelle delle migliaja. L'uso adunque dell'accento acuto da' grammatici additato, per lo meno, non era una pratica costante, una legge: ciò serva per gli amanti di erudizione. Quello, che allo scopo mio più importa si è, che la nota ς̀ da Diofanto destinata a significar sotto varie accidentali forme il numero sconosciuto, era una nota indeterminata ed astratta, alla quale Xilandro, e Bacheto sostituirono la lettera *N*. Dunque Diofanto diede un vero esempio di speciosa letteral analisi dinotando con indeterminata letteral nota lo sconosciuto numero del problema. Ma vi ha in Diofanto di più. Nella definizion IX io leggo: *defectus nota est litera* ψ *decurtata et deorsum vergens sic* ⋔. Ecco dunque in Diofanto anche il segno del meno da lui chiamato difetto, siccome il più abbondanza. Del più però non trovasi in esso segno: *Diophantus quidem*, così Bacheto, *ut significet plus nulla utitur nota, sed conjunctione tantum copulativa*. Parve a Diofanto, che la congiuntiva particella bastasse, ed il crear un nuovo segno fosse superfluo. Non si può pertanto dubitare, che Vieta trovato non abbia in Diofanto dei semi di speciosa letteral analisi. Ma ascoltiamo da Vieta medesimo l'opinione di lui sul genere dell'analisi di Diofanto. *Zeteticen autem* (1) *subtilissime omnium exercuit Diophantus in iis libris, qui de re arithmetica conscripti sunt. Eam vero tanquam per numeros, non etiam per species (quibus tamen usus est) institutam exhibuit, quo sua esset magis admirationi subtilitas et solertia. Quando quae logistae numeroso subtiliora apparent et abstrusiora, ea utique specioso familiaria sunt, et statim obvia*. Non avendo potuto Vieta non vedere in Diofanto le due spezie da lui adoperate per significazione del numero ignoto, e del meno, ciò che egli pensa di spezie da Diofanto medesimo usate, ma a fine di crear di sè maraviglia nascoste, intender non si può che di altre spezie oltre le due accennate. L'ambizion però di maraviglioso non è un onor per Diofanto, e per apporgli tal debolezza converrebbe esser fornito di dati positivi. Ma dove tali dati, se di Diofanto tanto poco sap-

(1) Vieta in art. *Analit. Isag.* cap. V.

piamo, tanto poco di lui abbiamo, se quel poco stesso che abbiamo, piuttosto che il lavoro originale di lui è a giudizio di Bacheto una compilazion maltessuta a *sciolo quodam, qui e tredecim libris Diophanti nonnullas in unum colligens quaestiones, eos quos habemus prae manibus arithmeticorum libros consarcinavit* (1)? Che che però sia di ciò, a me basta, che Vieta abbia riconosciuto essersi Diofanto nell'analisi sua di spezie servito.

§. V. Da Diofanto veniamo al tempo, in cui l'analisi fu dalle coste d'Africa portata in Italia. Leonardo pisano, che qui la trapiantò, altra speziosa analisi dir non si può che usasse che la lineare, come ho già osservato. E la differenza tra lui ed Euclide, ammessa la conseguenza delle osservazioni esposte al fine del §. III, sarà, che laddove, adoperando Euclide le linee a' generali teoremi di grandezze, e de' numeri, la generale rappresentativa di quelle convenientemente seguiva la general verità di questi; applicando Leonardo le linee alle condizioni, ai dati numerici di un particolar problema, questo veniva a ricever da quelle un' ampiezza, che da sè non aveva, e su la risoluzion di esso spargevasi un lume di general risoluzione di tutti i problemi simili. Il primo passo da questa speciosa analisi lineare verso la speciosa letterale dovea esser quello di valersi delle lettere iniziali delle parole. Io trovo infatti nel volume di Fra Luca le voci di più e meno accorciate alle iniziali loro, e prendendo a sciogliere problemi di due incognite, dice, *che più anticamente chiamato il numero primo cercato cosa, chiamavasi il secondo cosa seconda, ma da' moderni questa chiamasi semplicemente quantità, e dinotasi* q^a. Ma qui

(1) In quaest. XVIII et XIX lib. II.

non si arresta Fra Luca. Eccolo trattar dei rapporti tra le potenze moventi, i mobili, e le velocità impresse, ed eccolo con lettere, non mica a linee congiunte, ma astratte, esprimere le potenze, i mobili, le velocità (pagina 83, 84). Procedasi a Cardano ed a Tartaglia. Questi nella Parte II del suo *Gen. Trat. di Num. e Mis.* libro VII, pag. 109, insegnar volendo *a trovar quanti numeri semplici si voglia in continua proporzionalità in qualsivoglia data proporzione* rappresenta per *a*, *b* li due numeri della data proporzione, e successivamente per *c*, *d*, *e*, *f*, *g* . . . i numeri della continua progressione, senza aggiugner a queste lettere veruna linea, ma ad esse medesime l'immediato, ed intero ufficio assegnando di rappresentare in modo astratto i numeri. Traccie di letterale analisi più chiare imprime Cardano. Si veggano nel cap. XXXI dell'*Arte magna* quattro quistioni, nelle quali le due quantità incognite sono astrattamente segnate per *a*, *b*, ed i loro quadrati o cubi per altre lettere. Nel capo XL del suo libro *De regula Aliza* egli riduce una indagin sua sul caso irreducibile a questo termine: *Constituetur igitur problema sic. Sunt quatuor quantitates ordinatim* a b c d *quarum proportio* a *ad* d *est duplicata ei*, *quae est* b *ad* c; *et quod fit ex* a c (intendi la somma di *a*, e di *c*) *in* c *est aequale ei quod ex* d b (somma di *d*, *b*) *in* b. Ecco quattro quantità incognite espresse per quattro lettere. Ivi stesso esprime Cardano il numero, ultimo termine dell'equazione di terzo grado per la lettera *n*; e nel capo XLII lo esprime per la lettera *k*. Che mancava ormai più fuorchè passare dal particolare al general uso, piantar un sistema di regolato ed universale calcolo per letterali espressioni ed astratti segni i più semplici? Resta dunque ad esaminare come, quando ciò fatto si sia, e qual parte Vieta vi abbia avuta.

§. VI. Prendendo in mano il volume delle opere di Vieta, nella prima operetta *Isag.* (1) sotto il precetto I risguardante l'addizione si legge: *Solent analystae symbolo* + *adfectionem adjunctionis indicare*. E sotto il precetto II, in cui tratta della sottrazione, così: *Solent analystae symbolo* — *adfectionem mulctae indicare, et haec* λειψις *est Diophanto, ut adfectio adjunctionis* υπαρξις. Apparisce da questi avvertimenti di Vieta, che i segni +, — erano già di consuetudine allorchè ei scriveva, e che per conseguenza erano stati qualche tempo innanzi inventati, e nell'analisi introdotti. Intorno all'epoca dell'invenzione, ed introduzione non ho potuto raccoglierne notizia precisa. Osserverò bensì che essi non trovansi nell'algebra del bolognese Bombelli, uscita in luce l'anno MDLXXII, come vedesi in fronte dell'opera ed al piè della lettera dedicatoria, non già l'anno 1589 come dice Montucla (2), ma che usati si veggono dall'augustano Xilandro ne' suoi comenti sopra Diofanto, pubblicati in Basilea l'anno MDLXXV. Vieta nacque l'anno 1540, e morì nel 1603: è probabile, che egli non componesse la sua *Isag.* che in età assai matura, e potea l'uso di quei segni esser divenuto universale presso gli analisti, ovvero l'essere comune in Francia, e praticato da analisti di altre nazioni fece a Vieta credere generale la costumanza. Ma lasciando di più cercar su l'epoca, esporrò un pensiero sortomi in mente su la origin loro, cioè donde e come sien nati. Si richiami alla memoria, che Diofanto dinotò il meno con la figura ⋔, cui egli stesso disse essere la greca lettera ψ rovesciata e scorcata. Non potrebbe pertanto essere, che ciò vedendo in Diofanto, stimato siasi di segnare per la lettera ψ intera,

(1) *Isag.* in art. *Anal.* cap. IV. (2) Tomo I, pag. 485.

e diritta il più; poi sia piaciuto meglio cangiare in retta la linea curva orizzontale, e così trasformare ψ in $+$? Similmente cangiando in retta orizzontale il cappello, dirò così, curvo del diofanteo segno del meno ne sarà da $\pitchfork$ venuto T; ma per la troppa prossimità di $+$ a T si sarà abbandonato il tronco verticale, e ritenuta la sola retta orizzontale — per segno del meno. È questo un pensamento, al quale io non pretendo di attribuire maggior solidità di quella meriti; e se a talun paresse ghiribizzoso, mi perdoni il ghiribizzo. Veggo anche potermisi opporre una difficoltà: Xilandro, il primo traduttor di Diofanto, usò i segni $+$, $-$: fu egli il primo ad usarli, a trarli da quel segno del meno di Diofanto? E se ciò non fu, non è una incongruenza suppor dall'opera di Diofanto, prima che tradotta, derivati quei segni? Xilandro non dice parola, onde poterlo argomentare autor dei segni che usa. Ma non è incongruenza suppor, avanti che egli traducesse l'opera di Diofanto, derivati da essa i medesimi segni. Racconta Xilandro stesso nella lettera dedicatoria, che Regiomontano un secolo prima avea fatta menzione dell'opera di Diofanto da sè veduta in *bibliothecis italicis*. Bombelli narra, che eran già anni, che nella Vaticana scoperto si era, ed a' forestieri mostravasi un codice dell'aritmetica di Diofanto, allorchè egli recossi a Roma, e che data unitamente a certo Antonio Pazzi di Reggio, pubblico lettore di matematiche, una scorsa al trattato, e rilevatone il merito, ardor li prese di tradurlo, e cinque libri dei sette ne tradussero; ma poi da' travaglj all'uno ed all'altro avvenuti distolti furono dal compiere il bel lavoro. Bombelli però, al dir anche di Bacheto, trasferì nella sua algebra, e con le quistioni sue mescolò tutte quelle dei quattro primi libri di Diofanto, ed alcune del libro quinto. Ben considerando la successione di queste cose comprendesi qual numero d'anni dovea già esser corso dallo scoprimento del codice Vaticano. E quanti dotti forestieri veduto l'avranno? Quante copie ne saranno state tratte? Fu all'Accademia di Wittemberg dove, essendosi Xilandro l'anno 1571 recato, gli fu offerta a leggere l'opera di Diofanto, della quale andava ricco Andrea Dudicio Sbardellato nobile polacco presso l'imperial corte oratore, il quale applaudendo al desío natogli in petto di tradurla, ed illustrarla, di buon grado gli concesse il codice. Si sarà tenuto a credere, che Bombelli, Pazzi, Xilandro sieno stati i tre soli matematici nella greca lingua dotti, sotto i cui occhi sia Diofanto capitato in una stagione, nella quale Vieta affettò talmente il grecismo, che dall'appassionato elogista suo stesso Montucla ne ha biasimo: *M.r Viete étoit profondement versé dans le grec, et l'on ne s'en apperçoit que trop. Ses écrits sont tellement parsemés de phrases en cette langue, ou de mots qui en tirent leur origine . . . . que leur lecture est extrèmement laborieuse. Mais tel étoit le goût du tems où il vivoit: il falloit étaler de l'érudition grecque avec profusion pour meriter un nom parmi les savans.* In un tempo di tal gusto può egli essere riputato sconveniente il pensare, che più matematici leggessero nel greco originale, avanti la traduzione di Xilandro, l'opera di Diofanto, e che per effetto di quella gloria, a cui i dotti recavansi l'imitare le greche cose, taluno di que' matematici dal diofanteo segno del meno traesse nel modo da me divisato gli odierni segni del più e del meno? Pure, torno a dire, tal mio divisamento prendasi per ciò che si vuole. Un'osservazione, che aggiugner debbo rispetto al più, si è, che un segno astratto a rappresentarlo usò il Tartaglia, il quale stampò il suo gran trattato l'anno 1555, e nel capo I del libro IV della parte II stabilisce così: *Questo termine più, per abbreviar scrittura, si rappresenterà in questo modo* φ. Ritornando al filo dei precetti di Vieta nella sua *Isag.*, dal segno — del meno determinato distingue egli un altro segno del meno indeterminato: *Cum autem non proponitur utra magnitudo sit major vel minor, et tamen subductio est facienda, nota differentiae est* $=$, *idest minus incertum*. Siccome una linea orizzontale era stata costituita segno di sottrazione unica e certa di una quantità definitamente minore da altra definitamente maggiore; così parve acconcio segnare con due rette orizzontali parallele la doppia incerta sottrazione, quando si tratta di due quantità, tra le quali la maggioranza di una sopra l'altra è incerta, e la maggiore può cangiarsi in minore variandosi le due quantità con gradi indipendenti, contrarj, non proporzionali. Oggidì $=$ significa uguaglianza, per la quale Vieta non destina segno, ma continua, siccome Leonardo, Fra Luca, Cardano, Tartaglia ad enunziarla a disteso con il vocabolo latino *aequatio*. Non prenderò con precisione a definire quando siasi il $=$ trasferito dalla doppia contraria sottrazione a dinotar l'uguaglianza, privando la speziosa aritmetica di una nota per essa indeterminata sottrazione. Nella parte III delle epistole del Descartes (epistola 57) io osservo il segno $=$ prefisso al radicale quadrato, e trasferito a significare il doppio contrario senso, positivo e negativo di esso, come noi facciamo con il doppio segno $\pm$. E nello stesso luogo osservo significata l'uguaglianza con questa nota $\|$. Ma nella sua *Geometria* avvisa il medesimo Descartes di voler segnar l'uguaglianza con quest'altro simbolo $\propto$. Il Wallis poi ad indice dell'uguaglianza oltre la $\propto$ assegna anche la nota $=$. Rimasta l'analisi priva del segno di indeterminata sottrazione, era bene ristorarla di questo privamento, occorrendo non rade volte di dover maneggiare la differenza positiva di due quantità, delle quali e questa e quella può esser dell'altra maggiore, e giovando abbracciare in un sol calcolo entrambi i casi, e tenerne sotto l'occhio viva la rappresentazione. Il celebre signor Cagnoli nella sua bella *Trigonometría* si serve a tal oggetto del segno $\backsim$. Nel precetto III spiega Vieta la moltiplica giusta la genesi della superficie, e del solido esposta nella geometría di Euclide; onde concependo la moltiplice di A con B quale conducimento di A lungo B dice, che *designabitur commode vocabulo in vel sub: veluti* A *in* B . . . *vel, ut alii, factum sub* A *et* B. Non qui alcun dei due segni ×, ovvero · da noi usati per indicar la moltiplica; e non quell'accozzamento, per cui noi rappresentiamo il prodotto formato. Di fatto Harriot fu il primo ad accozzar le lettere per esprimere il prodotto bello e fatto; ed Ougthred, al dire del Wallis il primo ad indicare la moltiplica da farsi con il segno ×. Descartes, sebben posteriore, nella sua dottrina su le operazioni algebraiche alla testa della II parte della sua *Geometría* prescrive d'interporre alle due quantità complesse da moltiplicarsi insieme la lettera M tirando sopra ciascuna una linea tanto estesa quanto essa per significare ai termini tutti estesa la moltiplica. Nella parte però III delle sue epistole (epistola 53) trattandosi di moltipliche di sole quantità incomplesse trovo il semplice puntino · interposto. Le potenze quadrato, cubo ec. vengono da Vieta significate con le iniziali loro o semplici, o replicate, o accozzate le diverse insieme secondo la composizion delle potenze. Prendendo Vieta nel precetto IV a trattar della divisione propone il problema così: *magnitudinem magnitudini* *adplicare*, che è parimenti il concetto geometrico della divisione. Non dispiacerà vedere come di qua vien tratto il modo da noi pure adoperato per dinotar la divisione, di *B* esempigrazia per *A*, scrivendo $\frac{B}{A}$. *Quoniam magnitudo magnitudini adplicanda est . . . altiores autem depressioribus adplicantur commode intercedet virgula inter* B *altiorem, et* A *depressiorem, cui fit adplicatio*. Noi concepiamo, e segniamo la divisione di una grandezza per un'altra eziandio di ugual grado, ed eziandio d'inferiore. Esso modo di notar la divisione è in origine la forma delle frazioni, che non si dovette tardar ad applicare alle ragioni di minore disuguaglianza, e poi si passò ad applicare alla divisione, attesa la grandissima affinità tra frazione, ragione, divisione. Su di che non saranno neppur discare poche parole di Tartaglia nel suo *Euclide rassettato* alla definizione XIII del libro VII, la quale spetta le ragioni. *E perchè la metade se dipinge da pratici in questo modo* $\frac{1}{2}$, *Bovetio Severino chiama tal specie di proporzione* (in odierno linguaggio ragione) *subdupla per esser il numero sotto la virgula duplo a quello di sopra*. Ma abbastanza, e forse anche troppo, dei segni della speziosa analisi. Il mio intento però volea, che mi vi occupassi; e a chi non istimasse la materia degna d'intertenervisi risponderei con il chiarissimo Andres, *nelle scienze, come in tutte le cose grandi, le più piccole antichità interessare la curiosità de' saggi e veri filosofi* (1). Chiaro pertanto dal sin qui, riguardo ai segni delle analitiche operazioni, esposto con le parole stesse di Vieta risulta nulla lui avervi del suo. Passiamo della medesima sua *Isag.* al cap. V intitolato *De legibus Zeteticis*, e vuol dire delle leggi dell'arte di formare,

---

(1) Tomo IV, cap. III, nota alla pag. 79.

ed ordinare l'equazion del problema. Ecco la legge quinta, che è quella, la quale importa: *Quod Zeteseos opus, ut arte aliqua juvetur, symbolo constanti et perpetuo ac bene conspicuo datae magnitudines ab incertis quaesititiis distinguantur, utpote magnitudines quaesititias elemento* A, *aliave litera vocali* E, I, O, U, Y; *datas elementis* B, C, D *aliisve consonis designando*. Qui veramente è dove Vieta parla in tuono d'istitutore. Ma a vedere nel suo conveniente prospetto il merito dell'istituzione raccogliamo sotto l'occhio in un quadro tutto le istituzioni e tutti gli esempj varj che precedettero. Di due parti è composta l'analisi speziosa; di segni arbitrarj e convenzionali delle operazioni, e della espressione delle quantità astrattamente per lettere. Al meno arbitrario segno attribuì Diofanto, al più Tartaglia. I due segni stessi oggidì usati per il più e per il meno erano già in consuetudine avanti, che Vieta scrivesse. Il modo d'indicar la divisione con la orizzontal virgola tra il dividendo ed il divisore godeva antichità. Mancavano i due segni della moltiplica, e quello di due punta per la divisione, nè Vieta gli aggiunse. Espresse astrattamente per simbolo letterale costante, perpetuo, e ben cospicuo la quantità sconosciuta e cercata del problema Diofanto; espresse per lettere astratte quantità indefinite relative al moto Fra Luca. Espresse conosciute, e sconosciute quantità per lettere, a formar una soluzion generale, Tartaglia; e più di tutti delle lettere ad esprimer le quantità cercate, e le note si valse Cardano. Vieta ripartì tra le quantità cercate e le date l'alfabeto, assegnando alle prime le vocali, e le consonanti alle seconde; e fu il primo a servirsi per sistema in tutte le sue dottrine su le equazioni, ed in tutti i suoi problemi di letteral espressione. Eranvi insomma della speziosa analisi i materiali, Vieta gli unì, ed alzò l'edifizio: eranvi delle generiche istituzioni, dei particolari esempj; egli tutto recò al generale, vi diede regola, formò il metodo; piantò il costume. Montucla rimproccia a Wallis tra le altre esagerazioni a favor del suo Harriot di non vedersi *beaucoup de mérite à avoir introduit l'usage des petites lettres au lieu des grandes*, usate da Vieta. Il leggitor di questa mia storia avrà riflettuto, che le piccole lettere furon le prime ad essere tratte all'espressione delle quantità analitiche e dal greco Diofanto, e dagl'italiani Fra Luca, Tartaglia, Cardano, tornando l'uso loro più comodo.

§. VII. Ma che si dirà se io mi avanzi, ed asserisca, che non solo sparsi si erano della speziosa analisi i materiali elementi, ma prevenuto ben anche lo spirito? Si sospenda per poco il giudizio, sinchè esposta io abbia qui la regola da Cardano nel capo XXIX della sua *Arte magna*, chiamata la *Regola del modo*; ed eccone il più essenziale della descrizione: *Solve quamvis quaestionem . . . serva operationes . . . . et habebis regulam de modo pro omni consimili quaestione*. Esempio: 7 passi di drappo verde più 3 di drappo nero costano denari 72; e passi 2 di verde più 4 di nero costano denari 52, qual è il prezzo per un passo dell'uno, e dell'altro? Salvate le operazioni, o a meglio dire corso il giro di esse con accennarle solo senza eseguirle per salvar i numeri dati, trova il prezzo di un passo del drappo verde $= \frac{72 \cdot \frac{4}{3} - 52}{7 \cdot \frac{4}{3} - 2}$. Onde osservando il modo, nel quale in questa finale espressione combinansi i dati numeri, forma la regola generale per tutte le quistioni simili. Esalta tal regola qual madre di tutte le regole: *Merito haec modi regula mater regularum dici potest*. Dice di aver col benefizio di essa discoperte la massima parte delle dottrine componenti il sesto suo libro, il più profondo di tutti, intitolato *De regula Aliza*, che utilissima fu *magistris arithmeticae ut facilioribus quibusdam inventis artem docerent*. E chi pertanto non ravvisa in essa lo spirito della speziosa analisi? Mancavi la espression generale dei dati numeri; ma vi è l'artifizio di tenerli distinti, e vedere da principio a fine le combinazioni che prendono, vi è la mira, e l'intento di una soluzion generale e simultanea di tutti i problemi simili. Le quali cose tutte così essendo si comprende quanto prossimamente fosse la speziosa analisi preparata.

CAPO IV.

Di Diofanto, e dell'analisi di lui.

§. I. Si corona la Grecia, siccome in ogni amena letteratura e scienza, così nell'analisi di bella gloria, vantando Diofanto. E noto essendo, che gli arabi, allorchè dal saggio zelo, e generoso favore animati degli eruditi loro califi Almansor, ed Almamon dello studio si accesero di risorgere dalla tenebrosa barbarie, in cui caduti erano, ad un giorno di coltura e sapere del prisco eziandio migliore, con avidità cercarono di adornarsi delle greche dottrine, a tutta industria, e sollecitudine le opere de' greci maestri raccogliendo, e nella lingua lor trasportando; ragionevol dubbio ne nasce, se in luogo d'inventar essi l'analisi, che Leonardo dalle contrade loro ci recò, dall'opera piuttosto di Diofanto, come da fonte, la traessero. Or come portar su di tal dubbio fondato, e sicuro giudizio, se non per un esatto confronto dell'una e dell'altra analisi, dell'araba, e della diofantea? E come senza una piena cognizione di entrambe istituire un sì fatto confronto? Egli è perciò, che io a Diofanto consacro questo capo, nel quale precipuamente, com'è di mio proposito, mi adoprerò di porre in buon lume l'analisi di lui; ma insieme, colta occasione, delle cose tutte, che lo spettano, terrò discorso, a fine di purgarne la storia da tutto ciò che contro verità, o senza appoggio veruno ho scoperto, leggendo i varj scrittori, essere stato, anche da quelli di alto grido e celebrata autorità asserito; e non dubito, che mi saprà l'amator della storia analitica grado non poco del comodo, che gli offro di avere qui in breve spazio raccolto tutto quello, che a Diofanto appartiene. Che se intorno a moltissimi punti non mi riuscirà di stenebrare il vero, troppo densa essendo la caligine, in cui è sepolto, ed ogni face mancando che lo rischiari, ogni guida che scorga con sicurezza gli sforzi, non sarà opera perduta il distrugger la falsità, l'abbattere l'arbitraria asserzione, il ridurre al giusto valore la conghiettura. E avrò accresciuto su la fronte di Diofanto lo splendore, se distinguendo ne' raggi suoi la composta luce dell'analisi di lui, farò brillar qualche raggio non osservato, o non esibito nella conveniente chiarezza dai comentatori suoi stessi.

§. II. Le storie, sempre abbondanti nella descrizione delle guerre e delle stragi, e larghe d'immortalità ai fieri eroi, che anelarono a conquistar desolando provincie e regni, furono negli andati tempi comunemente assai scarse nella delineazione dei sorgimenti, e dei progressi delle scienze, e della meritata eterna riconoscenza avare ai placidi eroi, che per bene della umanità sacrificarono alle utili invenzioni, all'accrescimento degl'intellettuali lumi i piaceri, gli agi della vita, la salute. Di Diofanto, sottil aritmetico ed analista, sì certo, e chiaro onor della Grecia, trovasi poco men che silenziosa la greca storia. Credesi con tutta verisimiglianza dai dotti, che di lui parli Suida nel suo *Lessico storico-geografico*, ma indirettamente, al nome Ipazia, dicendo che questa preclara matematica donzella scrisse sopra Diofanto un comento; nè Bacheto, sebbene dichiari di aderir senza difficoltà al sentimento dei sommi uomini, che antecedentemente a lui in ciò versarono, sa però avere qual cosa del tutto certa, che 'l Diofanto aritmetico, del qual si tratta, riguardasse il comento d'Ipazia, e di Suida riguardi lo storico racconto: *non omnino certum est*. Opinion poi di Bacheto medesimo si è, che ad esso Diofanto aritmetico miri in un giocoso epigramma il poeta Lucillo; della qual cosa vedremo a suo luogo. Nulla di più, che al Diofanto, di cui è discorso, riferir si possa nella greca storia. Abulfaragio arabo, compositor coraggioso di una universale storia da Adamo sino al secolo XIII, in cui egli vivea, fa in due delle sue dinastíe greche di Diofanto menzione. Non si può determinare quando si cominciasse in Italia a conoscere il nome di Diofanto, e quando recata vi fosse l'opera di lui. La più antica notizia tramandataci della esistenza di essa nelle contrade nostre, l'abbiamo da un estero, dal celebre Regiomontano, il quale recatosi intorno agli anni 1460 in Italia, dove fiorivano le greche lettere, per istruirsi nelle medesime, racconta di aver in italiane biblioteche veduto il codice di Diofanto: così ne fa fede Xilandro: *Inveni tanquam exstantis in bibliothecis italicis, sibique visi, Diophanti operis mentionem a Regiomontano factam* (1). Gassendo nella

(1) *Xiland. in epist. nunc.*

vita di esso Regiomontano, parlando di sua dimora in Italia dice, che *per ejusmodi tempora graecos aliquot codices, tum comparavit, tum, quos rariores non potuit, commendato accepit, illosque aut ipse manu sua exscripsit, aut aliena manu sibi exscribi curavit*. Nulla qui, a dir vero, Gassendo del codice di Diofanto; ma nulla del pari in singolare di alcun altro dei codici da Regiomontano visti, acquistati, trascritti, o fatti trascrivere, in Germania seco recati, tradotti poi, ed illustrati. Dovrem dunque credere, che con tanto zelo di arricchirsi degli scritti de' greci autori avrà ommesso di provvedersi dell'aritmetica di Diofanto, e di portarla nell'Alemagna, qual gemma quanto più sconosciuta, tanto più preziosa? Cosa però, che reca la somma maraviglia si è, che largo in Italia non si spandesse la cognizione del codice di Diofanto; che in fiore essendovi lo studio della greca lingua, non venisse da qualche dotto a comun vantaggio tradotta; che per l'opposto niuna menzione ne faccia Fra Luca verso il fine del secolo XV, e niuna Cardano, e Tartaglia intorno la metà del secolo XVI; che nelle biblioteche rimanesse sepolto, ed andasse dimenticato per modo, che poco prima degli anni 70 del secolo XVI si riguardasse per una scoperta l'averlo rinvenuto nella Vaticana biblioteca. Pure, meditando su la ragione di ciò, una all'animo mio se n'è offerta, che mi è sembrata a convenienza buona, e sufficiente ad appagar ogni spirito discreto. Considerar si debbono insieme la sottigliezza dell'analisi di Diofanto, la imperfezione de' codici, la difficoltà, che si combinino in uno possesso di greca lingua, e possesso di analitica scienza. Prescindendo anche da tal difficile combinazione, non erano certamente gl'italiani analisti nel secolo XIV inoltrati nell'analitica finezza a grado di penetrare in testo corrotto la mente di Diofanto. Per la incapacità di rilevarne i misterj fu posto in abbandono, e vi stette, anche allor quando salita in Italia l'analisi a maggior altezza, e più sottil industria in Scipione Ferreo, in Tartaglia, in Cardano, in Lodovico Ferrari, Diofanto non sarebbe più stato, almen per buona parte, inaccessibile ai loro ingegni, come poco dopo nol fu a quel di Bombelli. Questi è quegli, che nella prefazione alla sua *Algebra*, data in luce l'anno 1572, ci dice della scoperta pochi anni innanzi fatta dell'opera di Diofanto nella Vaticana biblioteca. Si ascolti il racconto di lui, sul quale dovrò in seguito tornar più volte. *Questi anni passati essendosi ritrovato un'opera greca di questa disciplina nella libreria di Nostro Signore in Vaticano, composta da un certo Diofante alessandrino autor greco, il quale fu a tempo di Antonin Pio, ed avendomela fatta vedere Messer Antonio Maria Pazzi reggiano, pubblico lettore delle matematiche in Roma, e giudicatolo con lui autore assai intelligente de' numeri (ancorchè non tratti de' numeri irrationali, ma solo in lui si vede un perfetto ordine d'operare) egli, ed io per arricchire il mondo di così fatta opera ci dessimo a tradurlo, e cinque libri (delli sette che sono) tradutti ne abbiamo; lo restante non avendo potuto finire per gli travagli avvenuti all'uno ed all'altro; ed in detta opera abbiamo ritrovato, ch'egli assai volte cita gli autori indiani; col che mi ha fatto conoscere, che questa disciplina appo gl'indiani prima fu che agli arabi.* Osservando venir da Bacheto contraddette, e rigettate alcune delle cose da Bombelli in codesto suo tratto asserite, ho creduto necessario procurarmi su del codice Vaticano un' esatta notizia, e l'ho conseguita per mezzo dell'erudito padre abate Andrea Mazza, ornamento insigne della Congregazione di Monte-Cassino, il quale raccomandato al ch. abate Gaetano Marini suo amico il mio desiderio, valse, che della cura s'incaricasse di un diligente esame. Non uno, ma più sono nella Vaticana biblioteca i codici di Diofanto: uno sotto il num. 191 in carta bombicina del secolo XIII, un altro sotto il num. 200 in carta pergamena del secolo XIV, un terzo sotto il num. 304 in carta del secolo XV. Ciò basta per ora: in appresso verrò opportunamente sponendo le osservazioni a norma di mie domande fornitemi su questi codici.

§. III. Ciò, che si ha intorno a Diofanto di certo si è, Alessandria avergli dati i natali, *alexandrini* leggendosi all' opera di lui in fronte. Su la desinenza del nome comincia la diversità tra gli scrittori. Nel *Lessico* di Suida stampato si trova avere Ipazia scritto un comento in Διοφάντην, in Diofante. Di questa guisa nel tratto sopra trascritto reca il nome italianamente Bombelli. Pocok nella latina traduzione della storia di Abulfaragio dice *Diophantes*, ed istessamente il Wover nel capo XXII della *Polymathia*. Ma Bacheto nota, che in due purgatissimi e stimatissimi codici della Pubblica biblioteca di Parigi leggesi Διόφαντον, Diofanto. I codici Vaticani portano in fronte Διοφάντȣ, di Diofanto. Aggiugne Bacheto due riflessi; il primo de' quali è, che Suida al luogo nel corso del *Lessico* proprio ha bensì Διόφαντος, Diofanto, con la spiegazione, nome proprio, ma non Διοφάντης. La seconda è, non trovarsi presso gli scrittori greci persona alcuna col nome di Diofante, e molte all' incontro trovarsene col nome di Diofanto: come il Diofanto pretore di Atene mentovato da Diodoro di Sicilia, Zenobio, e Suida stesso al proverbio Δραχμὴ χαλαζῶσα, *dramma*, o meglio strenna *grandinosa* teatrale; il Diofanto scrivano del re Erode, del quale, al raccontar di Tetzes, ardito avendo imitare, eccellente che in ciò era, il carattere, percepì in dura morte un tristo frutto di sua abilità; ed il Diofanto maestro in eloquenza di Libanio, dell'orator, che fu in tanta grazia presso Giuliano apostata, come narra Suida medesimo al nome *Libanio*. Si avanza Bacheto a dire essere dalle recate osservazioni sì penetrato, che non immeritamente pargli di sospettare non esser tampoco la voce Diofante di greca indole: *ut non immerito vocem* Διοφάντης *ne quidem graecam esse suspicer*. Su di che interrogato avendo il giudizio dell'inclito mio collega ed amico Angelo Mazza, per la sublime sua poesia sì distinto, e nella greca lingua sì dotto, ecco le sue riflessioni: Διόφαντος, non Διοφάντης, *pare a chi considera in radice le voci, che lo compongono, l'uscita gramaticale di questo nome. Nè muover ci debbe, che nelle stampe di Suida siasi alla prima sostituita la seconda terminazione. Per ugual modo singolarizzasi Stobeo leggendo* Εκφάντης *filosofo pitagorico da Plutarco propiamente appellato* Εκφαντος. *Con tutto ciò io non oserei escludere dalla greca nomenclazione la voce* Διοφάντης, *come fece Bacheto, il quale non avendola neppure di greco conio, mostrò di non si ricordare di* Συκοφάντης, *e di* Ιεροφάντης, *che sono certamente voci grecissime. Chi sa poi, che, attesa la sublimità dei problemi dell'aritmetico di Alessandria, non si abbia voluto denominarlo Diofante, il divino (cioè eccellente) dimostratore?* . . . .

§. IV. Versa la seconda disputa sul tempo, in cui Diofanto fiorì. Nel suo libro de' numeri moltangoli cita egli Ipsicle; ed un sol matematico di questo nome ricordasi tra' greci, alessandrino pur esso, al quale i due libri attribuisconsi aggiunti agli *Elementi* di Euclide, il quartodecimo, ed il quintodecimo. E nella prefazione al quartodecimo scrive l'autore, che venuto eragli alle mani il lavoro di Apollonio, prima imperfetto, poi a maggiore ampiezza condotto; il che fornisce argomento di riguardare Ipsicle qual coetaneo, o di poco posteriore ad Apollonio, che per fede di Eutocio di sua geometrica scienza si distinse, e splendette ai tempi di Tolommeo Evergete, cioè anni dugento e più avanti l'era cristiana. È questo dunque un verisimil limite alla ricerca del tempo, in cui visse Diofanto. Un altro non meno verisimil ne segna Suida là dove dice, che la tanto famosa ed ammirata Ipazia ai tempi di Arcadio, ed Onorio, cioè intorno agli anni 400 dalla nascita di Cristo, scrisse oltre il canone astronomico, e il comento nei conici di Apollonio, un comento del pari in Diofanto. Suida in verità non dice, che questo Diofanto fosse aritmetico; che l'opera da Ipazia comentata aritmetica spettasse; molto meno che il Diofanto fosse da noi conosciuto, e su l'opera di lui il comento. Ma qual altro Diofanto matematico, di cui resti ricordanza nella storia greca, e quanto insieme degno di una tanta donna, come Ipazia, quegli, del qual parliamo? Qual più conveniente scelta a spicco d'ingegno, e prova di varia scienza che il lavoro dell'astronomico canone, il dilucidamento della geometría di Apollonio, l'illustrazione dell'aritmetica di Diofanto? Abbiamo dunque due limiti, che comprendono lo spazio di anni 600, dai 200 avanti ai 400 dopo la cristiana epoca, entro dei quali con tutta verisimiglianza si chiude il tempo, in cui Diofanto sparse di suo aritmetico genio il lume. Ma lo spazio è assai largo; e in qual parte di esso ebbe Alessandria la sorte di produrre Diofanto? Bombelli nel tratto sopra recato francamente asserisce, che egli visse sotto Antonino Pio; ma non citando di sì franca asserzion fondamento, Bacheto credesi in diritto di rigettarla. Ho voluto sapere, se ve ne fosse ne' codici Vaticani alcun cenno; ma realmente non ve ne ha alcuno. Bacheto pensa piuttosto, che il nostro Diofanto aritmetico sia uno stesso con quel Diofanto astrologo, che congiuntamente al medico Ermogene fece Lucillio soggetto di suo poetico sale in un epigramma, che Bacheto medesimo traduce in latino così:

Hermogenem medicum monet astrologus Diophantus
Vix illum menses vivere posse novem.
Qui ridens, vide, ait, quid nobis astra minentur;
Imminet at moneo mors inopina tibi.
Dixit, et extendens dextram admovet, et Diophantus
Desperare alium dum jubet, ipse perit.

Laonde essendo Lucillo, per quanto congetturando inferir si può, vissuto circa ai tempi di Nerone, reputa quinci Bachèto assai probabile, che in quel torno stesso di tempi fiorito sia Diofanto. Io non veggo per ogni parte del discorso che congetture, non fornite di quella solidità, che sarebbe a desiderarsi, e lascio ad altri il giudicare, se onor sia per Diofanto, l'aritmetico sì prestante, sì assennato, sì rispettabile, l'essere uno stesso con quel Diofanto astrologo, impostore indovino, ludibrio di un poeta. Montucla, detto che il tempo, in cui Diofanto visse, *n'est pas connu bien précisement*, prosegue, *suivant Abulpharage, auquel nous recourons au défaut d'autorités grecques ou latines, il fleurit sous l'empéreur Julien, ou vers l'année* 365 *de notre ére. Ce témoignage, à la vérité, n'est pas entiérement décisif; mais il est du moins certain que Diophante ne fut guere postérieur à ce tems; car la savante Hypatia avoit commenté son ouvrage, et l'on sait que cette fille célébre mourut vers le commencement du cinquieme siecle*. Non reca Montucla ragione, per cui la testimonianza di Abulfaragio non sia decisiva. Ma in realtà, lungi dal dover, o potere averla in conto di decisiva, si hanno motivi di dubitare del suo valore, o piuttosto di negarne ad essa un qualunque. È giudizio degli eruditi, che Abulfaragio non sia buono storico ed autorevole che in quella parte, che risguarda i saraceni, i mogoli, e le conquiste di Gengis-Kan. Pocock istesso, il traduttore di lui, per riflesso al troppo suo discordare nelle greche cose e nelle romane dagli scrittori di queste nazioni degni di tutta fede, non sapea lasciarsi indurre alla traduzione, nè la intraprese che vinto dagl'iterati stimoli del Langhainio, il quale però confessava, che Abulfaragio *linguas graecam et latinam non callebat*; e questa la sorgente era stata de' suoi errori. Il perchè non è temerità, ed ingiusto torto ad Abulfaragio il credere, che confuso egli abbia in uno due Diofanti, l'aritmetico, e l'altro maestro di eloquenza a Libanio favorito oratore di Giuliano apostata. E non è poi strano, dopo aver posto tra' filosofi sotto questo empio imperatore vissuti Diofante, l'udirlo soggiugnere *cujus liber* (così traduce Pocock) *quem algebram vocat celebris est?* Si può mai Diofanto essere sognato di chiamar arabicamente *algebra* il libro suo? Per fine, se giusta Bacheto non abbiasi a conceder peso alla franca asserzione di Bombelli, che sotto l'impero di Antonino Pio collocò Diofanto, sol perchè non cita egli testimonio veruno, come si avrà a prestar credenza ad Abulfaragio, che niun parimenti ne reca, e altronde si sa essere in greca storia molto imperfetto, e dalla verità errar sovente lungi? Convien però dire, che siccome Montucla, così prestata gliel'abbia Bernardino Baldi, anzi più piena questi ed assoluta, poichè nella sua cronaca de' matematici all'anno 365 ritarda a parlar di Diofanto senza un cenno, che controverso sia il tempo, in cui fiorì. Ma le riflessioni esposte mi sembrano bastanti a provare di quanto poco momento stimar debbasi l'autorità di Abulfaragio, anzi che esser idonea a far base ad assoluta definizione. Io mi appiglierei all'asserzion di Bombelli, persuadendomi, che avesse di tanto franca asseveranza fondamento, quantunque non lo esprima, se in altro punto non trovassi il suo racconto di verità mancante, od ai Vaticani codici non corrispondente, siccome con imparzial ingenuità sarà per me notato in appresso. Ben pesate adunque le cose tutte, nulla io ardirei pronunziare sul secolo, in cui Diofanto visse; e penso, che il filosofico riserbo esigga di contenerci a dire, che verisimilmente fiorì nel corso dei sei secoli da 200 anni prima a 400 dopo l'epoca cristiana.

§. V. Di libri tredici composta era l'opera di Diofanto: il dice egli stesso al fine dell'undecima ed ultima definizione. Xilandro scrive, che fama era al suo tempo trovarsi i tredici libri nella Vaticana biblioteca; e narrando Regiomontano di aver in italiane biblioteche veduto l'opera di Diofanto, conghiettura Xilandro, che tutti quei tredici libri appunto, che nella Vaticana dicevansi esistere, abbia veduti: *Sane tredecim libri arithmeticae Diophanti ab aliis perhibentur exstare in bibliotheca Vaticana: quos Regiomontanus viderit*. Questo *viderit* è un modo meramente conghietturale, non mai un modo affermativo, come l'usato di poi da Bacheto: *Regiomontanus tredecim Diophanti libros se alicubi vidisse asseverat*. Moreri, e Sabathier, da lui copiando l'articolo *Diophante*, dicono raccontarsi da Bombelli parimenti, che tredici libri di Diofanto gli erano stati mostrati nella Vaticana biblioteca: ciò che è falsissimo, notando espressamente Bombelli, che sette erano soltanto: leggi il tratto nel §. 11 da me trascritto. Il cardinal Perronio nativo di Berna, vescovo di Eureux, nelle matematiche erudito asserì più d'una volta a Bacheto, come questi riferisce, che dei tredici interi libri era ricco il codice da lui posseduto, e dato ad imprestito al suo compatriotta Guglielmo Gosselino, che proposto erasi di comentarlo; ma dalla peste assalito perì, seco traendo nella sciagura il codice indarno ricercato appresso degli eredi di lui. Veniamo al fatto dei codici Vaticani. Niuno ve n'ha, che contenga l'opera di Diofanto perfetta, ma solo tanto, quanto è in luce; con la sola differenza, che nel codice sotto il num. 200 i sei libri delle quistioni aritmetiche stanno divisi in sette, ai quali succede il libro sopra i numeri moltangoli, non altrimenti che nelle stampe ai sei. Nulla più per testimonianza del Salmazio citata da Bacheto trovasi nel codice Palatino. Laonde raccogliendo, e questo e il codice del polacco starosta Sbardellato, sul quale Xilandro lavorò il suo comento, e il codice pubblico di Parigi, di cui Bacheto si valse per il suo, e i codici Vaticani concordano in essere ugualmente tutti mancanti e scemi. Nè ciò solo, ma avendosi Bacheto medesimo per mezzo del Sirmondo procurata del Vaticano codice, non so di quale, in parte copia, e fatto avendo di tutti confronto, assicura di avervi scorto una concordia in tutti sventuratamente sì grande nella replica di alcune quistioni, nel traslocamento di altre, nella corruzione de' sentimenti, che non dubitò essere tutti dallo stesso viziato fonte, cioè esemplare, scaturiti. Da tal fonte non poteva essere uscito, nè per conseguenza della sua impurezza partecipe il codice del cardinale Perronio, se era qual egli lo vantava: doveva esso dunque essere ben singolare. Quanto alle ripetizioni, al disordinato situamento delle quistioni nell'aritmetica di

Diofanto, ho già nel §. IV del capo superiore il pensier recato di Bacheto, che l'aritmetica stessa qual noi l'abbiamo, anzichè il genuino lavoro di Diofanto, altro non sia che la fatica di uno sciolo compilator perverso. Se ciò sia vero, la compilazion perversa debbe essere antica, ed aver preceduti gli scolj, che ai due primi libri veggonsi inseriti. Non si scorge nè in fronte, nè in alcuna parte di questi scolj il nome del loro autore. Xilandro tuttavía dice, che sin d'allora credevansi di Massimo Planude, e soggiugne, che ciò rendevasi a lui vie più probabile, perchè il codice, che avea per le mani, teneva una giunta di cose logistiche sotto il nome espresso di quel greco monaco. Ma qual era il fondamento di quella credenza sin dal primo tempo, che volta si era a Diofanto la considerazione, ed innanzi pure, che Xilandro lo comentasse? Io non pretenderò che fosse assolutamente quello, che son per esporre, ma dirò, che il potè essere. Nella Vaticana biblioteca trovasi sotto il num. 116 un codice in carta bombicina del secolo XIV, il quale contiene separatamente dall'opera di Diofanto gli scolj col nome in fronte di Planude. Poichè costui fu greco, e visse intorno la metà del secolo XIII, e poichè gli scolj suoi ai due primi libri tali li suppongono, quali noi gli abbiamo, giusta conseguenza pare, che, se fu Diofanto non solo da ignoranti e negligenti copisti viziato nel dire, ma da temerario compilatore travolto, e sostanzialmente corrotto, nella Grecia sua stessa, prima che all' Italia nostra tragittasse, soffrì l'ingiuria.

§. VI. Ad onta delle sofferte ingiurie tal è la luce, che per l'opera di Diofanto balena, che a sè trasse, e fissò lo sguardo de' migliori aritmetici, e fu stimata meritar le cure della più penosa interpretazione. Ho già sparsamente nominate in massima parte le persone, che all'util fatica si accinsero, nè altro debbo or fare che schierarle con ordine de' tempi, interponendovi, od aggiungendovi di seguito quelle, che sin qui il discorso non portò di nominare. La celebre Ipazia contasi per la prima in tessere a Diofanto comento, e la più fortunata; che intero avendo e sano il lavoro dell'autore, più agevole le riusciva ciò, a che unicamente doveva intender lo ingegno, cioè a raggiugnere le elevate idee di lui, a svolgere i sottili suoi artifizj, a supplire quei passi intermedj, che sogliono i sublimi autori scrivendo trasvolare, mal misurando dalla perspicacia e rapidità dell'intelletto loro la chiarezza dell'esposizione dei concetti di esso, e la facilità di comprenderli. Abulfaragio segna all'anno 348 dell'egira, che corrisponde all'anno nostro 969, una interpretazion araba di Diofanto fatta per Moamad Al-Buziani *e regione Nisaburi*. Il greco Planude fu il terzo all'impresa; ma non la condusse che al fine del libro secondo, e così infelicemente, che Bacheto non dubitò di chiamare gli scolj di lui *miras graeculi ineptias*, nella lettura delle quali sarebbe perdere l'olio e l'opera. Succedettero Bombelli bolognese, e Pazzi reggiano; e ben a doler hassi l'Italia, che le avversità ad essi sopravvenute tolto le abbia la gloria di essere in queste europee regioni la prima a produrre una versione, ed illustrazion di Diofanto. Ma Bombelli trasfuse tutte le quistioni dei quattro primi libri, e non poche del quinto nell'opera sua, e si fece lume, e guida per intender Diofanto; e Bacheto medesimo confessa di essersene molto giovato ad emendar la traduzion di Xilandro. Oltre che però ommette Bacheto di far memoria della versione, che Bombelli in un col Pazzi intrapresa avea, e su cinque libri già eseguita, falla egli in dire, che non lungo intervallo di tempo dopo Xilandro, Bombelli avuta la sorte di vedere nella Vaticana biblioteca il codice di Diofanto, delle quistioni di questo, ingemmò l'opera sua. Bombelli diede in luce la sua *Algebra* nell'anno 1572, e la prima di lui intenzione e cura non era già stata d'innestare ad essa alcune delle cose di Diofanto, ma sì di porgere al mondo tradotto l'intero codice. Per altra parte Xilandro ci racconta egli stesso, che nell'ottobre del 1571 gli fu mostrato in Wittemberga il codice posseduto dallo Sbardellato, e l'anno 1575 nè pubblicò la traduzione. Vieta, come Bombelli, arricchì delle finezze di Diofanto la sua *Logistica speciosa*, scegliendo le più belle quistioni, e dei canoni da esse tratti componendo i sottili suoi libri de' *Zetetici*; ma non si arrischiò all'impresa di restituir interamente i sette libri, che ci rimangono, di Diofanto alla purità loro; e Bacheto, sebben lo esalti per uomo sommo, principe de' matematici di que' tempi, e vanto della Francia precipuo, *quo se praecipue mea Gallia jactat alumno*, pensa tuttavía, che nol facesse disperando di riuscirvi. Fu di maggior coraggio Bacheto medesimo: si pose all'arduo cimento, e non lasciò studio, meditazione, conato di suo ingegno per castigar la traduzion di Xilandro, per correggere le torte interpretazioni ed i falsi calcoli, per determinare le ambigue frasi, e dilucidar le oscure, per riempiere le lacune del testo, e sanarne i tratti corrotti, per penetrar nelle più nascoste cause, e spiegar i sintomi varj delle operazioni di Diofanto, scorgere i supposti porismi, comprendere gli artifizj. A sentir ebbe talvolta minore all'uopo e al desío il suo acume, non potendo giugnere nè a rimetter qualche passo troppo depravato, nè a dimostrare in generale qualche verità da Diofanto usata; onde lasciò campo ad esercitarsi al gran Fermat, il quale poi nello scorrerlo altri ne aprì più vasti ed ardui ai sublimi ingegni del Beguelin, dell'Eulero, e del La Grange. Stevino, considerando la mostruosa sconcezza di una versione di parola in parola del testo viziato di Diofanto, stimando per altra parte cosa più bella l'aggiugnere al suo trattato di aritmetica ed algebra le quistioni diofantee della stessa forma vestite che le antecedenti, fece in suo linguaggio fiammingo una libera versione dei quattro primi libri, che pubblicò l'anno 1605, e che l'olandese Alberto Girard tradusse in cattivo francese, e compì con una simil versione dei libri quinto e sesto, e nel corso intero delle opere di lui diede in luce l'anno 1634. Quantunque Stevino, e Girard dicano di tradur liberamente, si può dir piuttosto, che, colto il senso, non facciano che presentar compendiosamente lo spirito delle quistioni di Diofanto. Scrive il Leibnizio nella seconda sua lettera all' Oldemburgo, che l'Ozanam mostrato gli avea il suo Diofanto recato ai simboli algebraici, che dovea esser ben presto commesso al torchio, con l'arricchimento di molte quistioni ommesse da Diofanto e da Bacheto, e con l'addizione di un settimo libro di quistioni paralipomene, cioè lasciate. E soggiugne Leibnizio ad Oldemburgo scrivergli tal cosa per aver inteso essere anche là ov'egli dimorava, in Londra, per uscire, od esser uscito un Diofanto simbolico; lo che crede il Dutens editore delle opere di Leibniz, che al Kersei vada riferito. Singolar talento venne al Billy di trasformare in geometra l'aritmetico Diofanto, costruendo in geometriche figure, e con geometrici principj dimostrando le quistioni tutte di lui, che ne sono capaci, ed altre simili di sua invenzion aggiugnendone: onde le due operette *Diophantus geometra — Diophantus geometra promotus*. Ecco la storia dei traduttori, ed interpreti di Diofanto. Montucla induce in inganno il suo leggitore scrivendo: *Il ne nous reste des treize livres des questions arithmétiques de Diophante que les six premiers avec des notes du moine Planude*, senza distinguer che sono i due soli primi i corredati di queste note. Proseguendo a dire: *Ils sont ordinairement suivi d'un septieme, qui probablement étoit autrefois le treizieme: Diophante y traite des nombres polygones d'une maniere très-savante*: reca con quell'*ordinairement* una qualche eccezione su ciò che è universale ne' codici. Nel soggiugnere: *Lorsque Diophante fut trouvé dans la bibliothéque Vaticane vers le milieu du seizieme siecle, Xilander le traduisit, et le commenta*, fa credere sino allora sempre sconosciuto in Italia, ed in qualunque di queste occidentali parti di Europa l'opera di Diofanto, e sul Vaticano codice lavorata la versione, ed il comento di Xilandro; cose che non son vere. Non una parola appresso Montucla della traduzion intrapresa dal Bombelli in un col Pazzi, e del benefizio agli analisti da Bombelli prestato con trasportare almeno nella sua algebra il tesoro di massima parte delle diofantee quistioni, rendendosene così il primo maestro; niuna della libera compendiosa versione dello Stevino e del Girard; niuna della forma simbolica, sotto la quale apparecchiato avea di produrle l'Ozanam; niuna della forma geometrica data lor dal Billy. E se gli sfuggiron queste notizie, non è maraviglia che gli sfuggisse quella del comento di Moamad Al-Buziani.

§. VII. Ma questi sbaglj o difetti di Montucla, che non riguardano l'opera di Diofanto che estrinsecamente, dir si possono leggieri a confronto di quello, che, toccando intrinsecamente l'analisi di lui, è essenziale, e quanto più grave, tanto più inescusabile. Ecco intero il passo di Montucla:

L'ouvrage en questìon (di Diofanto) *nous apprend que l'algebre ancienne s'éleva du moins jusqu'aux équations du second degré. Car quoique l'arithméticien grec n'en resolve aucune de cette espece, il promet* (defin. xI) *d'enseigner à le faire dans un autre écrit; et d'ailleurs les limitations qu'il met quelquefois à certaines problêmes, montrent clairement qu'il connoissoit la formule de ces équations.* Io non posso giugnere a comprendere come abbia potuto Montucla ciò scrivere, massimamente citando la definizione xI di Diofanto, nel comento alla quale Bacheto previene così: *Equidem regulis simplicibus* (*cum scilicet una species uni speciei aequatur*) *in tribus prioribus libris Diophantus utitur; in sequentibus vero ad compositas etiam non nunquam devolvitur.* E che son queste regole composte, se non le regole spettanti lo scioglimento delle equazioni di secondo grado di tre spezie composte, della quantità ignota, del suo quadrato, del numero dato? Nel comento alla quistione xxxiiI del libro I ecco distender Bacheto le composte regole dalle quistioni di Diofanto medesime raccolte, ed eccolo nel comento alla quistione xxxiiI del libro iv avvertire *Hic Diophantus ad regulas compositas devolvitur*; e replicar l'avviso nel comento alla quistion vI del libro vI. Nè le due già accennate sono le sole quistioni, nelle quali Diofanto sciolga equazioni di secondo grado. Seguilo un po' attentamente, e lo vedrai far lo stesso nelle quistioni xxiiI e xlv del libro iv, nelle xiiI e xxxiiI del v, nelle vI, viI, viiI, ix, x, xI e xxiv del vI; e non dar no sempre i soli proventi dello scioglimento; ma talvolta tutti segnarne i tratti, come nella xlv del libro iv, e nella xiiI del v. E come, Dio buono, potè tutto ciò rubarsi all'occhio di Montucla! E come potè all'incontro nella definizione xI vedere ciò che non vi ha, la promessa vale dir di un altro scritto, in cui Diofanto lo scioglimento delle equazioni di secondo grado insegnato avrebbe? Diofanto non dice di ciò fare in altro scritto, ma *posterius*, e lo fa, non con distinto trattato, ma all'occorrenza succintamente. Che se Bacheto medesimo nel suo comento ad essa definizione scrisse: *Cum Diophantus hic polliceatur se daturum regulas, quomodo explicetur quaestio, cum duae species uni aequales reperiuntur, in ejus libris, qui extant, hujusmodi regulae non continentur, ita ut videatur regulas omnes algebrae quas vocant, supposuisse ut pote notas (nam iis passim utitur in iis libris) vel alio opere edito, qui ad nos minime pervenit, eas tradidisse*: se Bacheto così scrisse, non altra può essere stata sua mente, fuorchè non trovarsi nei libri, che ci restano, di Diofanto una dottrina di proposito, estesa, piena delle regole dell'algebra, e spezialmente delle regole composte riguardanti le equazioni di secondo grado; altrimenti Bacheto, oltre contraddire al fatto, sarebbe poi caduto in contraddizion seco stesso in confrontare nel suo comento alla quistion XXXIII del libro I con le regole composte del Nugnez, e con quelle a' suoi giorni comuni le regole composte *ex Diophanto*. Sebbene poi Montucla nell'asserir, che Diofanto niuna equazione di secondo grado non risolve, inteso non abbia di ciò dire delle equazioni pure, apertamente a ciò opponendosi la definizione XI, ma solo delle equazioni affette; ciononostante fu senza dubbio il parlar di lui preso in assoluto senso, ed in tutta ampiezza, che trasse un altro celebre storico ad espressamente scrivere, la dottrina di Diofanto versar soltanto su le equazioni di primo grado. L'analisi di Diofanto arrestata sarebbesi in troppo umil luogo, se ciò fosse vero. Si potrebbe piuttosto dire esser Diofanto salito a toccare le equazioni complete di terzo grado; poichè nella quistione XIX del libro VI trovasi l'equazione $x^3 + x = 4x^2 + 4$; e Bacheto nota: *Hoc sane loco devolvimur in aequationem complexem, in qua duae species duabus speciebus aequales sunt. Nec vero sciri potest qua ratione hujusmodi aequationem resolvat Diophantus, cum in libris ejus qui extant nusquam id docuerit. Certe regula generalis et perfecta hactenus ignoratur. Particularis autem quae in hoc casu locum habet traditur a multis.* La deriva Bacheto dalla proporzione $x^3 : x^2 :: x : 1$, dalla quale, sommando gli antecedenti ed i conseguenti, si ha $x^3 + x : x^2 + 1 :: x : 1$, ed $x^3 + x : 4x^2 + 4 :: x : 4$: onde essendo per supposto $x^3 + x = 4x + 4$, ne segue essere $x = 4$. Ma senza questo indiretto giro vedesi a colpo d'occhio, che dividendo per $x^2 + 1$ ambi i membri dell'equazione $x^3 + x = 4x^2 + 4$, rimane $x = 4$; e tale non dubito io essere stata la spedita via tenuta da Diofanto, e della quale, appunto perchè naturalissima, e tosto da sè stessa offerentesi, credette egli essere superfluo far parola: cosicchè reca stupore, che Bacheto, il quale seppe spignere perspicace l'occhio in tanti cupi di Diofanto, non abbia veduto in sì aprico, giugnendo a scrivere non potersi indovinare di qual modo sia stata da lui sciolta quell' equazione. Ritornerò in altro luogo opportunamente su questo passo di Bacheto. Proseguendo a dire del grado, a cui Diofanto nell'analisi sollevossi, non tralascierò di notare l'opinione, di cui fu tentato Bombelli, che nelli sei libri cioè dal tempo, di tutto distruggitore, rapitici, si avanzasse egli a sciogliere l'equazione $x^4 + px = q$, parendogli, che nei libri rimastici, con proporsi di trovar via via numeri quadrati, ai quali aggiunto un qualche numero restino quadrati, cammini una strada a quell'intento. Egli è di fatto procedendo su queste tracce di Diofanto, che Vieta deprime l'esposta equazione di grado quarto ad una di secondo. Siccome però ciò non si effettua che mediante una cubica mancante di secondo termine; così il pensiero sorto in animo a Bombelli importerebbe, che Diofanto nei libri perduti costituito avesse la regola di sciogliere questa sorta di equazioni cubiche prima d'innoltrarsi allo scioglimento di quella equazione di quarto grado. Guardiamoci ugualmente e dal troppo umiliare, sino all'infimo grado abbassandola, e dall'innalzar troppo l'analisi di Diofanto. Ciò che è certo si è, che egli sciolse le equazioni complete di secondo grado, che toccò con un semplicissimo caso alle complete di terzo, e che a questo grado non limitossi rispetto alle equazioni *pure*. S'incontra qualche equazione pura di grado quarto sciolta nei libri che abbiamo, e la via, che si apre nelle definizioni IV, VII, VIII e XI, tende più alto. Nelle IV, VII, VIII descrive la genesi delle podestà di quel che con singolarità egli chiama *numero*, cioè l'incognito, e ne segna la scala sino alla 6.ª, primamente considerando esso numero in assoluto stato, poi in quello di denominator a frazione di dato numeratore; e nella definizione XI parla senza ristringimento delle equazioni a due spezie. A proposito di essa scala io debbo per il confronto, che in seguito occorrerà di fare, avvertire il tenore di Diofanto nel denominarne i gradi. La sua regola è di considerare ogni grado superiore siccome il prodotto di due inferiori, scegliendo i due più prossimi fra loro, qualora varj binari posson produrlo; e dai nomi loro il nome di quello compone. Quinci chiama egli quadrato-cubo il quinto grado, e cubo-cubo il sesto. Non disse pertanto esatto Montucla in dire, che per Diofanto *chaque puissance est dénommée par les deux inférieures, dont elle est le produit*; poichè Diofanto stesso nella definizion IV avverte, che anche la moltiplica del quadrato nel quadrato-quadrato genera il sesto grado, niente meno che la moltiplica del cubo con il cubo; e cionullaostante a questa genesi si appiglia, e di qui la denominazione ne trae.

§. VIII. Ciò tuttavía che di gloria cigne Diofanto, non è il grado delle equazioni che sioglie, ma la sottilità sua analitica in quel genere di quistioni semideterminate, che ad onore immortale di lui si chiamano *diofantee*. Qual finezza di principj, qual industria di artifizj, qual avvedutezza nelle posizioni, qual destrezza di ripieghi alle difficoltà che gli si affacciano, quale maestría nella condotta di tutto il calcolo per giugner là ove vuole a risoluzioni in numeri razionali insieme e positivi! Sì, Diofanto non era giunto a formarsi concetto dei numeri negativi, e delle risoluzioni per essi; non riguardava sciolto un problema, se non per l'invenzione di numeri positivi. Per ciò le quistioni di Diofanto, oltre alla condizione *esplicita*, che non potea non colpir gli occhi di ogni leggitore, della fuga dei valori irrazionali, ad un'altra astretti sono *implicita*, non avvertita da Montucla nella sua *Storia*, nè dall'Alembert nella *Enciclopedía* articolo *Diophante*, della fuga dei valori negativi. Laonde esse quistioni presentate non furono nell'intero loro aspetto, nell'arduità lor tutta, nel pieno lor merito; poichè non vi avrà chi or non intenda, che la fuga dei valori negativi unitamente alla fuga degl'irrazionali valori era un vincolo, che ad un altro annodavasi, ed obbligava Diofanto a delle antivedenze, e industrie particolari. Ma è appunto l'accorgimento nel primo divisare, ed esprimere su le quantità cercate, ed in ogni nuovo assumere nel giro del calcolo, sì, che termini a numeri congiuntamente positivi, e razionali, e tra via il meno possibile si componga, s'involga, s'innalzi; sì, che in una parola risplendavi per ogni lato la più elegante semplicità: è tale accorgimento, io dico, ciò che in ispezial modo la perspicacia di Diofanto manifesta, e la lode forma di lui più grande; ma ciò insieme, che nei libri di lui stessi è mestieri contemplare, essendo sì varie ai varj bisogni le sottili maniere, che impossibil sarebbe senza un numero troppo moltiplicato di esempj darne un'idea un po' sufficiente. Che se tal sia la quistione, che al suo ingegno contrasti il portarsi direttamente al suo scopo, bello è il vederlo andarvi indirettamente con posizioni arbitrarie, prevalendosi dello stesso falso lor provento per giugnere al provento desiderato, con un'arte, che partecipa insieme dell'arte della *falsa posizione*, e della regola del *modo* insegnata da Cardano nel capo XXIX della sua *Arte magna*, e da me in succinto esposta al §. VII del capo superiore. Ecco in un esempio la dichiarazione di tal arte di Diofanto. Trovare tre quadrati, che quadrati di nuovo compongano insieme un quadrato: è la quistion XXXII del libro V. Suppongasi il primo de' quadrati x^2, il secondo 4, il terzo 9: sarà la somma dei nuovi quadrati loro $= x^4 + 16 + 81 = x^4 + 97$, che facciasi $= (x^2 - 10)^2 = x^4 - 20x^2 + 100$; onde $97 = -20x^2 + 100$, $20x^2 = 3$, $x^2 = \frac{3}{20}$. E sarebbe x razionale, se fosse $3:20$ in ragion di quadrato a quadrato. Ma donde vien 3, donde 20? Il 20 è il doppio del 10 detratto arbitrariamente da x^2 nell'assunto quadrato $(x^2 - 10)$, ed il 3 è l'eccesso del quadrato 10^2 sopra l'aggregato 97 dei due quadrati 16, 81 degli arbitrarj numerici quadrati 4, 9 da principio assunti. Ad ottener dunque l'intento, che x esca razionale, trattasi di trovare in luogo degli assunti quadrati 4, 9, e dell'assunto numero 10 due quadrati y^2, z^2, ed un numero n, cosicchè sia $n^2 - (y^4 + z^4) : 2n$ in ragion di quadrato a quadrato. Conservando l'assunto quadrato 4, ossia ponendo $y^2 = 4$, si pigli $n = z^2 + 4$: sarà $n^2 - (y^4 + z^4) = z^4 + 8z^2 + 16 - 16 - z^4 = 8z^2$; $2n = 2z^2 + 8$; $n^2 - (y^4 + z^4) : 2n :: 8z^2 : 2z^2 + 8 :: 4z^2 : z^2 + 4$; la qual ultima ragione, e per conseguenza la prima, sarà di quadrato a quadrato, se come è quadrato $4z^2$, così lo sia $z^2 + 4$. Si renda dunque quadrato $z^2 + 4$, ponendo $z^2 + 4 = (z + 1)^2 = z^2 + 2z + 1$; donde $z = \frac{3}{2}$: si avrà quinci $z^2 = \frac{9}{4}$, $n = \frac{25}{4}$ oltre ad $y^2 = 4$. Con questi numeri ritornando da capo si scioglierà il problema determinando x. Ma ugualmente si risolverà prendendo i quadrupli loro 9, 16, 25; e così ama di fare Diofanto. Preso dunque per primo dei desiderati quadrati x^2, per secondo 16, per terzo 9, sarà quadrando essi medesimi, e sommando, $x^4 + 337$ da rendersi quadrata con porla $= (x^2 - 25)^2$; e ne verrà da questa equazione $337 = -50x^2 + 625$, $x^2 = \frac{288}{50} =$, che è ragione di quadrato a quadrato riducendosi a $\frac{144}{25}$; onde $x = \frac{12}{5}$. Frequente è appresso Diofanto nelle sue semideterminate quistioni l'uso di tal arte. La semideterminata analisi, quantunque oggetto, anzi di curiosa specolazione che di util pratica, fu coltivata da molti, segnalatamente, oltre ai traduttori ed interpreti di Diofanto nel §. VI di già nominati, dal Frenicle, dal Prestet dal Pell. Ma quelli che propiamente l'accrebbero, e l'arricchirono furono Bacheto, Fermat, Eulero, la Grange. Bacheto dir si può, che al ramo diofanteo, consistente nella condizione dei numeri razionali, un nuovo ne aggiugnesse, quello per la condizion limitato dei numeri interi. Fermat aggrandì, estese il ramo diofanteo. Eulero, e la Grange ornarono di belle sottili invenzioni, ed a sistema ben ordinato composero i due rami.

§. IX. Sebbene poi nelle semideterminate quistioni sia, ove più si occupò, e maggiormente spicca l'ingegno di Diofanto, non son però le sole da lui trattate, come asserisce Vincenzo Riccati nella storica prefazione ai tre volumi delle sue analitiche istituzioni: *De problematibus determinatis, quae resolutis aequationibus dignoscuntur, nihil omnino Diophantus: agit duntaxat de eo problematum semideterminatorum genere, quae respiciunt quadrata, aut cubos numerorum, quae problemata, ut resolvantur, quantitates radicales de industria sunt vitandae.* Arreca maraviglia come un Vincenzo Riccati, per maturità nello scrivere ugualmente che per profondità di saper sì lodato, abbia potuto ciò affermare, massime dopo aver poco innanzi detto di avere non tenue studio in leggere gli antichi greci impiegato. Poichè basta aprire il volume di Diofanto per vedere nel primo libro una lunga serie di quistioni determinate, e taluna ve ne ha sparsa negli altri libri. Stevino tutto all'incontro nella prefazion sua dice, che il primo libro *est des questions, n'ayans qu'une solution.* Ma neppur ciò è esattamente vero, dovendosi eccettuare la quistion ultima sotto il num. XLIII, della quale Diofanto stesso effettua, e presenta tre soluzioni; e molto più la XIV, di trovar due numeri, il prodotto de' quali alla somma loro sia in una data ragione; la qual quistione si riconosce tosto indeterminata, e comecchè Diofanto ne dia ivi una sola soluzione, nel libro però IV, riproponendola sotto il num. XLI, la scioglie indefinitamente. Alcune altre quistioni indefinite indefinitamente sciolte trovansi presso Diofanto, come dello stesso libro IV ai numeri XXXVII e XXXIX. Trattò dunque Diofanto principalmente quistioni semideterminate, ma non ommise del tutto le indeterminate, e molto meno le determinate, sciogliendone, a vantaggio del precipuo suo scopo medesimo, di quelle parecchie, e di queste ben molte: onde doppiamente, ed in modo strano errò Vincenzo Riccati.

§. X. Era conveniente cosa, anzi doverosa, porre in giusto prospetto l'analisi maneggiata nei libri di Diofanto, il grado segnare di quella, distinguerne le spezie, della principale scoprire tutte le condizioni, definir appieno la natura, adombrar le arti, avanti di discutere se Diofanto stato ne sia propriamente l'inventore, ragion volendo, che ogni qualità di essa analisi sia presa in considerazione nel giudizio. Xilandro non ha parola, che risguardi tal disputa. Bacheto, senza prendersi l'incarico di agitarla, nella lettera dedicatoria denomina Diofanto *optimum praeclarissimumque Logisticae parentem:* ma potrebbe aver ciò inteso soltanto in largo senso, in quello cioè, che di poi nella prefazione, rigettando l'opinion di coloro, che predicaron per autor della *Logistica* l'arabo Moamad figlio di Moisè, esprime con tali accenti: *Evidens est nullum, qui de Logistica scripserit authore nostro (Diophanto) antiquiorem hactenus innotuisse.* Che anzi essendo questo il luogo, dove, tenendo egli Diofanto per vero padre della *Logistica*, avrebbe dovuto espressamente asserirlo, e produrne le prove; e non facendolo, regola di buona critica vuole, che s'inferisca non in altro che nel lato significato del più antico maestro a noi rimasto e noto aver Bacheto attribuito a Diofanto il titolo *parentem*. Tanto poi più, che nel comento alla definizion xI parlando delle regole dell'analisi, e massimamente di quelle per lo scioglimento delle equazioni di secondo grado, lascia in dubbio, se supponendole Diofanto, le supponga come già di comune scienza, ed adulta consuetudine, o come da lui in altra anteriore opera insegnate. Il Montucla pronunzia: *Il n'est pas possible de déterminer si Diophante fût l'inventeur de l'algebre*. Il contrario però è parso al celebratissimo abate Andres: *Diofanto stesso* (a giudizio di lui) *parla in guisa, che sembra mostrare assai chiaramente d'essere stata sua invenzione la dottrina da lui proposta, e spiegata nella sua opera. Egli chiama tentativo, prova, conato suo la formazione di quel metodo per la risoluzione de' problemi numerici: egli dice, che questo suo metodo riuscirà più difficile, e laborioso per essere ancora affatto disconosciuto* [1]. Il luogo di Diofanto, a cui in ciò dire si riferisce dall'abate Andres, altro non può essere che la lettera preliminare di Diofanto a Dionisio, che è del tenor seguente: *Cum animadverterem te (observandissime mihi Dionysi) studio discendi explicationem quaestionum earum, quae in numeris proponuntur teneri; aggressus sum ejus rei viam rationemque fabricari, ex ipsisque fundamentis, quibus tota res nititur initio petito naturam ac vim numerorum constituere. Quod negotium ut videatur fortasse difficilius (quippe ignotum adhuc) . . . . . tamen cum tua alacritas, tum mea demonstratio efficiet, ut facile id comprehendas. Celeriter enim addiscunt, quorum ad discendi cupiditatem doctrina accedit*. La parola *fabricari*, l'asserzion *ignotum adhuc* dimostrano a tanta luce, che Diofanto va a fare qualche cosa di nuovo, che bisognerebbe non aver occhi per non vederlo. Tali frasi colpirono su le prime anche Montucla: *Quelques mots* (egli dice) *qu'on lit dans son épitre préliminaire, semblent le dire*: esser cioè Diofanto dell'algebra inventore; *mais examinés avec attention, ils paroissent se rapporter également à la méthode particuliere qu'on voit regner dans son ouvrage; de sorte qu'il n'en ré-*

---

(1) Tomo IV, cap. III.

sulte aucune lumiere pour fixer notre incertitude sur ce point. A me par troppo il dire, che da quelle espressioni non ne esca alcun lume; mi par troppo il restrignere la novità, che annunziano, al metodo, che nell'opera di Diofanto regnar si mira; ma parmi anche troppo il dedurne essere stato Diofanto in assoluto senso inventor dell'analisi. Incomincio dall'osservare, che si proponevano quistioni su i numeri; che Dionisio era preso da desiderio di appararne la spiegazione; che Diofanto su la dottrina di lui alla viva brama unita fondava la speranza, che con celerità fosse per apprendere ciò, che egli era per dimostrargli. Passo a riflettere su le definizioni, che Diofanto alle quistioni premette. Nella cura di premetterle trova l'abate Andres una conferma per credere Diofanto dell'algebra inventore: *Egli entra* (prosegue il ch. Storico) *a sporre le parole, di cui ha da usare, a formare definizioni delle cose, che ha da trattare, ed a spiegare minutamente le dottrine preliminari, come colui, che va a parlare di una scienza nuova, che non è ancor conosciuta da altri*. Io nel modo, che Diofanto tiene in esse definizioni scorgo un argomento contrario. Lungi appunto dallo spiegare minutamente le dottrine preliminari, vi scorre sopra velocemente, e, come osserva Bacheto, *mira brevitate perstringit, ut non tam ea explicare voluissse videatur quam indicare, tyronesque admonere, ut non nisi horum cognitione jam probe instructi ad hosce libros evolvendos accedant*. Lungi dall'usare il linguaggio di uno che crea, quello usa di uno che raccoglie sott'occhio cose note, e consuete. Distinguendo il numero indefinito dal definito, lo sconosciuto cioè dal conosciuto o dato, dice, che il primo con singolarità *numerus vocatur; nota ejus* ς̀; il secondo *monas, cujus nota* μ̀. *Vocatur, est*, sono impersonali modi, che significano cose di già stabilite, ed in costume. Lo stesso stile adopera nella definizion IX ponendo la nota del meno. E ciò che merita considerazione anche maggiore, espone ivi la regola, che meno moltiplicato per meno produce più, e moltiplicato per più produce meno; ma non va oltre l'esposizione senza un menomo tocco di dimostrazione. Divisando pure i gradi dell'ignoto numero, che sono quelli, che costituiscono la diversa altezza delle equazioni pure, o i diversi termini delle equazioni affette, impersonalmente ne ennunzia di ciascuno il nome *appellatur*, e ne segna la nota, *est nota*. Nella definizion X avverte, che chi intraprende a sciogliere quistioni debb'esser in tutte le operazioni su le *spezie*, cioè su gli accennati gradi, già ben esercitato e nell' apparecchio, e maneggio degli uguagliamenti ben destro, senza recarsi a carico di darne i precetti, e contentandosi di fuggitivamente additar tali cose. E nella definizione XI toccando l'ultima riduzione delle equazioni, la tocca così di volo, come conviene non a chi inventa ed istruisce, ma a chi compila, e rammemora sol per regola di metodo. Promette nella stessa definizion XI di mostrar poi come dispieghisi la quistione, anche allor quando *duae species uni aequales relinquuntur*: ciò che riferisce alle equazioni complete di secondo grado. Ma stendendo io l'occhio su quelle quistioni, nelle quali o per incidenza tra via, o nel fine per intrinseca, condizion loro equazioni di secondo grado presentansi, scorgo che alla prima, che gli si affaccia nella quistione XXIII del libro IV, la qual è $x^2 = 4x - 4$, dice secco secco, senza nulla aver premesso su l'arte di scioglierla, che *fit x aequalis* 4; e nella quistion XXXIII del libro medesimo incorrendo nell'equazione $5x^2 = 3x + 18$, avverte, senza operazion veruna di scioglimento, non poter x essere razionale, non essendo $\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5 \times 18$ numero quadrato. Altrove in seguito, e massimamente nelle quistioni XLV del libro IV, e nella XIII del V segna, è vero, i tratti della risoluzione delle due equazioni, nelle quali si abbatte; ma non è mai che egli parli in persona singolare, e come di cosa sua; non mai, che prenda a dottrinalmente spiegare, e dettar da creatore e maestro primo la regola di svolgere da una equazione di secondo grado il valor del numero sconosciuto; non è che uno, il quale con operazioni particolari applica una dottrina supposta. E questo è tutto l'adempimento della promessa fatta nella definizion XI; poichè nelle quistioni stesse VI . . . XI, dove per natura di esse vien condotto a finali equazioni di secondo grado, torna a dare nudo nudo il valor del cercato numero, cioè l'effetto dello scioglimento, soppresso ogni atto del medesimo. Dal complesso di tutte queste osservazioni, che si fortificano scambievolmente le une le altre, mi par di dover inferire, che eravi innanzi Diofanto tra' greci un'analisi, che sapevasi lo scioglimento delle equazioni di secondo grado. Ma d'altra parte, se recar non vogliasi a Diofanto un grave gravissimo torto, riconoscer si debbe per le parole di lui nell' epistola preliminare, che egli insegni nell'opera sua qualche cosa di nuovo, e sino allora ignota. Dunque per comporre i riflessi io mi veggo guidato a distinguere, e pensare, che conosciuta già fosse per anterior invenzione in Grecia l'analisi e di primo e di secondo grado, e che opera di Diofanto sino allora sconosciuta, od almeno priva di regole, di artifizj certi, di forma sia stata l'analisi semideterminata, su la quale principalmente Diofanto ne' libri suoi esercita, e intende, e fa brillare l'acume del suo ingegno. Questa distinzione mi agevola la risposta al primo de' due negativi argomenti, che l'abate Andres soggiugne a rinforzo di sua opinione in questi termini: *Osservo in oltre, che nè Diofanto nei moltissimi problemi, che si propone, e scioglie non cita mai verun altro matematico, che n'abbia cercata la soluzione; nè vedesi da' greci posteriori citato altro scrittore di tale scienza anteriore a Diofanto; nè gli arabi, che in questa parte possono aver tanto peso di autorità, quanto gli stessi greci, che ci sono rimasti, parlano di altro greco algebrista che di Diofanto*. Non era mestieri, che Diofanto, ponendo per tenor di ordine alla testa de' suoi libri un compendio delle generazioni, e delle significazioni, un cenno delle operazioni e delle regole analitiche, o nelle sue quistioni venendo a farne uso, citasse alcun autore, se erano comuni e consuete: piuttosto pare, che se in altro anterior libro egli stesso ne fosse stato autore, ommesso non avrebbe di quello citare, tanto essendo dei proprj parti d'ingegno l'amore. E non potea Diofanto citar autore degli artifizj nelle semideterminate quistioni, essendo l'autor, l'inventore egli stesso. Quanto all'altro negativo argomento, dov'è nei greci storici avanti Suida, che si parli di Diofanto medesimo? Dov'è, che Suida stesso ne parli con chiarezza, la quale a lui accerti inteso il suo parlare? Dove per fine, che ne parli egli direttamente? Al nome soltanto d'Ipazia, soltanto indirettamente è verisimil soltanto che ne faccia menzione, siccome da me nel §. 11 fu spiegato. Dopo ciò, qual maraviglia, che di altro analista non trovisi nelle greche storie a noi pervenute il nome? Questo silenzio, non d'altra forza in sè assolutamente fornito che di quella di un negativo argomento, sembrami non ne ritener menoma nel confronto. Nè debbe tampoco parer cosa strana, che del solo Diofanto, non di altro greco analista a lui anteriore giugnesse dopo un numero di secoli alle mani degli arabi l'opera, ed a notizia il nome. L'arabo storico Abulfaragio comprendesi evidentemente aver tratto da Suida ciò che di Diofanto scrive, mal accozzando due luoghi del greco storico lessicista, quello al nome Ipazia, e quello al nome Libanio. Certamente che non potea Abulfaragio dal Lessico stesso trar cognizione di altri greci analisti. Gli argomenti adunque estrinseci e negativi, e per la general lor condizione, e molto più per i particolari rispetti, non vagliono, a mio parere, a prova, che stato sia realmente Diofanto il creatore dell'algebra, come opina l'illustre abate Andres, e l'argomento intrinseco formato su l'esame dell'opera stessa di Diofanto vi si oppone. Contuttociò, credendo io, che quanto sconviene a Diofanto la lode di assoluto creatore dell'analisi, altrettanto la gloria dovuta gli sia d'inventor dell'analisi semideterminata, quinci con tal distinzione volenteroso all'abate Andres mi unisco in pronunziare, che debba coronarsi di onore il nome di lui con quello de' più illustri greci, de' più famosi inventori, de' più benemeriti delle scienze.

§. XI. Il Bettini ne' suoi *Apiarj dell'universa filosofia matematica* (1) scrive rispetto all'origine dell'algebra così: *Scito interim algebram nihil aliud revera esse, quam scientiam quadraturae in numeris. Cujus fundamenta Euclides noster jam olim posuit lib. 2. Elem., et lib. 9., prop. 8. unica omnes radicum progressiones aperit. Quare algebram non ab arabibus inventam, sed propagatam occasione mercimoniorum recte dixeris.* Dall'inferir che fa questo scrittore aver gli arabi non inventata, ma sol propagata l'algebra, perchè Euclide già

(1) Apiar. XI, progym. I, cap. II.

molti secoli prima ne pose i fondamenti, parebbe, che Euclide ne' suoi *Elementi* in tutta forma espressa espressissima posti avesse all'algebra i fondamenti, anzi intero eretto l'edifizio. Onde ne seguirebbe, che Diofanto in suppor l'analisi delle equazioni di secondo grado avrebbe potuto riguardare all'opera degli *Elementi* di Euclide, che da secoli già godeva la luce, e la stima de' greci. Ma se gli è vero, che Euclide nel libro II de' suoi *Elementi* presta, o a meglio dir apparecchia nelle proposizioni 4.ª e 5.ª in general modo, e rimoto i fondamenti all'analisi delle equazioni di secondo grado, egli è altrettanto fuori del vero, che ivi ne ponga i fondamenti immediati, proprj, formali, espressi. Piuttosto è da por mente ad alcuni dei Dati di Euclide. Nel Dato LVIII dimostra egli, che se alla retta data AD (*Fig.* 4) sia applicato lo spazio dato AG; ma con il difetto della figura GD di data spezie, dei lati cioè della quale BD, DP sia data la ragione, insieme con l'angolo da essi compreso BDP: saranno dati i lati medesimi. Poichè tagliata per mezzo in E la data retta AD, e su la metà ED, intorno alla diagonale DG del parallelogrammo di spezie dato GD prolungata costrutto il parallelogrammo simile EZ: essendo questo conseguentemente di spezie dato, e su retta data ED, sarà per ciò dato in grandezza. Ma $EZ = KT + EG + GZ + GD = KT + 2\,EP - BP = KT + AG$: onde $KT = EZ - AG$. Dunque, essendo dati di grandezza questi due parallelogrammi, sarà ancor dato di grandezza il parallelogrammo KT. Ed essendo esso dato eziandío di spezie per essere simile al GD siccome intorno alla medesima retta DH: cioè data essendo la ragion de' suoi lati $KG : GT = BD : DP$, e dato l'angolo compreso $KGT = BDP$: saranno dati ciascun a parte i lati medesimi KG, GT.

Dunque sarà data la retta $EB = KG$, e quinci $BD = ED - EB$, e finalmente anche DP in ragion data con BD. Rechiamo ad algebraiche spezie la proposizione. Sia il dato valor dello spazio $AG = S$, la retta data $AD = a$, la ragione dei lati BD, DP della figura di spezie data BP sia quella di $1 : m$, il lato BD dicasi x, onde $DP = mx$. Essendo in oltre dato l'angolo D, e perciò $sen. D$, sarà l'altezza del parallelogrammo BP, ed istessamente del parallelogrammo $AG = mx\, sen. D$. Sarà dunque il parallelogrammo $AG = AB \times mx\, sen. D = (a - x) \times mx\, sen. D = (ax - x^2)\, m\, sen. D = S$. È questa equazione, che segnerò (A) l'espressione dei dati supposti. La proposizione di Euclide è, che in conseguenza saran dati i valori x, mx. E la dimostrazion in sostanza è, che in virtù di quei dati supposti viene ad esser dato di spezie, e di grandezza, conseguentemente ne' due suoi lati il parallelogrammo $KT = EZ - AG$; cioè, in algebraiche spezie voltando, $\left(\frac{1}{2}a - x\right)^2 \times m\, sen. D = \frac{1}{4}a^2 . m\, sen. D - S$: la qual equazione altro non è che l'equazione (A) accresciuta nell'uno e nell'altro dei membri della quantità $\frac{1}{4}a^2 . m\, sen. D$. Tutta dunque la proposizione di Euclide si riduce in fondo a ciò: che data l'equazione $(ax - x^2)\, m\, sen. D = S$, sarà dato x per l'equazione $\left(\frac{1}{2}a - x\right)^2 m\, sen. D = \frac{1}{4}a^2 . m\, sen. D - S$, la stessa che la data con l'aggiunta del termine $\frac{1}{4}a^2 . m\, sen. D$ nell' uno e nell'altro membro. E se per avere il caso più semplice si ponga l'angolo D retto, onde $sen. D = 1$, ed insieme pongasi la ragione $m = 1$: il senso della proposizione di Euclide va ad essere, che data l'equazione $ax - x^2 = S$, sarà dato x per l'equazione $\left(\frac{1}{2}a - x\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 - S$, una stessa con la data fuori dell'aggiunta di $\frac{1}{4}a^2$ cioè del quadrato della metà del coefficiente a di x a ciascun dei due membri. Il valor di x, che, seguendo i raziocinj di Euclide si trae dall'equazione $\left(\frac{1}{4}a^2 - x\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 - S$, è il solo $x = \frac{1}{4}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - S\right)}$. In simil modo nel Dato LIX insegna Euclide, che se su la retta data AD (*Fig.* 5) insista lo spazio dato AG eccedente della figura DG di data spezie, saranno di questa dati i lati DB, DP: dimostrando, che divisa per metà nel punto E la retta data AD, e delineato l'intero schema, sarà dato di grandezza il parallelogrammo KT, dato di spezie, perchè simile al DG, ed insistente sopra la data $KP = \frac{1}{2}AD$; e quinci sarà pur dato di grandezza, siccome di spezie, il parallelogrammo $EZ = KT + EP + PZ + DG = KT + 2EP + DG = KT + AG$: onde si rende dato EB, conseguentemente $DB = EB - ED$, e quindi DP in ragion data con DB. Trasportando a spezie algebraiche con le dinotazioni stesse di sopra adoperate, sarà l'equazion $(ax + x^2)\, m\, sen.\, D = S$ l'espression dei dati supposti, e la proposizione di Euclide penetrata all'intimo significato vorrà dire in generale: data codesta equazione darsi x per l'equazione $\left(\frac{1}{2}a + x\right)^2 m\, sen.\, D = \frac{1}{4}a^2.\, m\, sen.\, D + S$; e nel caso più semplice di $sen.\, D = 1$, di $m = 1$: data l'equazione $ax + x^2 = S$ darsi x per l'equazione $\left(\frac{1}{2}a + x\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 + S$, onde $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + S\right)}$. Premesse queste due proposizioni passa Euclide nei Dati LXXXIV, LXXXV a dimostrare, che se due rette (*Fig.* 6. e 7.) AB, BG comprendano in angolo dato B un dato spazio AG, e data sia la differenza, o la somma di esse rette, sarà eziandio data ciascuna di loro in singolare. Poichè immaginando presa su la maggiore delle ignote rette, qual sia BA (*Fig.* 7) una porzione BD uguale alla minore BG, e compito il parallelogrammo equilatero BP, sarà DA la differenza data delle due rette AB, BG, su la quale starà applicato lo spazio dato AG con l'eccesso della figura BP di spezie data. E nella figura 6. concependo AB prolungata da B in D sinchè sia $BD = BG$, sarà AD la data somma $AB + BG$, su la quale applicato starà il dato spazio AG con il difetto della figura BP di data spezie, siccome parallelogramma, equilatera, con dato angolo $DBG = 180 - ABG$. Dunque nell'una e nell'altra figura per i Dati LVIII, LIX verrà data BG, e indi $BA = AD \pm BG$. In algebraiche spezie, posta la retta $AB = x$, la $BG = y$, la differenza, o somma data $x \mp y = a$, il dato spazio compreso da x, y sotto l'angolo dato B, espresso per $xy\, sen.\, B$, posto $= S$; con trasferire dall'equazione $x \mp y = a$ il valore di y nella equazione $xy\, sen.\, B = S$, si avrà l'equazione $x(\pm x \mp a)\, sen.\, B = S$: che con i segni inferiori corrisponde a quella, alla quale si è per me ridotto l'euclideo Dato LVIII, anzi con esso coincide fatto ivi $m = 1$, essendo già l'angolo $B =$ all'angolo D; e con i segni superiori corrisponde e coincide a quella, nella quale ho ristretto il Dato LIX. Io mi do a credere, che non possa alcuno nei Dati LVIII, LIX non iscorgere sotto geometrica forma tutta l'arte della risoluzione delle equazioni di secondo grado, e non ravvisare nei Dati LXXXIV, LXXXV due delle applicazioni di essa anche appresso di noi ordinarie. Nello spazio pertanto dei secoli, che passarono da Euclide a Diofanto qual cosa più facile, che alcuno trasportasse dal geometrico all'aritmetico i Dati LVIII, LIX di Euclide, e così la soluzione stabilisse delle equazioni di secondo grado?

§. XII. L'origine, che io vengo dall'additare dell'analisi delle equazioni di secondo grado tra i greci, piacerà, mi lusingo, più che quella assegnata da Bacheto comentando le quistioni XXX, XXXI, XXXIII del libro I di Diofanto. La quistione XXX è: *Invenire duos numeros, ut summa ipsorum, et productus ex eorum multiplicatione datos efficiant numeros.* Ed avverte Diofanto: *Oportet autem inveniendorum numerorum summae semissis quadratum quadrato superare productum multiplicationis.* Indi nota: *Est autem hoc Plasmaticum.* Nella XXXI propone Diofanto: *Invenire duos numeros, ut et summa ipsorum, et summa quadratorum ab ipsis ortorum datos conficiant numeros*; ed avverte: *Oportet autem duplum summae quadratorum quadrato superare quadratum summae numerorum*; e nota: *Et hoc quoque Plasmaticum est.* Nella XXXIII propone: *Invenire duos numeros, ut intervallum ipsorum, et productum multiplicatione faciant datos numeros.* Avverte: *Oportet autem quadruplum producti multiplicationis cum quadrato intervalli junctum facere quadratum*; e ripete: *Et hoc quoque Plasmaticum est.* Su la voce *Plasmaticum* versa l'interpretazione di Bacheto, e fabbrica egli il suo parere intorno le fonti delle regole per lo scioglimento delle equazioni di secondo grado. Ecco il suo dire: *Xilander male Plasmaticum interpretatus est effictum aliunde; cum potius significet id a quo aliud quippiam effingi et plasmari potest. Ego itaque nil aliud voluisse Diophantum ajo, quam indicare ex hujusmodi quaestionum solutione, seu ex conditionibus adjectis, vel ex canonibus inde deductis formari et plasmari quodammodo regulas illas, quas vocant compositas, cum scilicet ex tribus infimis speciebus duae uni aequales reperiuntur. Etenim prima et secunda illarum regularum* (intende quelle che spettano le equazioni: $x^2+nx=p$; $x^2=nx+p$) *ab hac ipsa quaestione trigesima tertia facile deducuntur. Tertia vero* (quella spettante l'equazione $x^2+p=nx$) *pendet omnino a trigesima. Quamobrem cum a trigesima prima nulla formetur hujusmodi regula, non dubito eadem verba (et hoc quoque Plasmaticum* *est*) *ibi temere inculcata esse, ab ipso scilicet scholiasta, vel imperito amanuensi ex aliis quaestionibus eo translata.* Bacheto non ha osato di assolutamente negare alla voce *Plasmaticum* il senso passivo da Xilandro attribuitole, ed ha riconosciuto di doversi almen contenere a dire, che piuttosto le compete il senso attivo. Il fatto sta, che essa l'uno e l'altro ammette del pari; ed in quale Diofanto l'abbia adoperata, dal complesso di tutti i rapporti, che la voce medesima riceve nelle citate quistioni di Diofanto, raccoglier si debbe. Al primo volger la considerazione su le condizioni ad esse quistioni da Diofanto apposte, tosto scorgo un rapporto espresso tra la condizione della quistion XXX con il teorema 5.° del libro II di Euclide, e tra la condizion della XXXI con il teorema 9.° dello stesso libro euclideo; nè ho che a quadruplicare le quantità uguagliate nel teorema 5.° per vedere in esso la condizione della quistion XXXIII: poichè essendo per quel teorema $\left(\frac{1}{2}a-h\right)\left(\frac{1}{2}a+h\right)+h^2=\frac{1}{4}a^2$, ne segue $4\left(\frac{1}{2}a-h\right)\left(\frac{1}{2}a+h\right)+4h^2=a^2$, dove $4h^2$ è il quadrato dell'intervallo $2h$ dei due inuguali numeri $\frac{1}{2}a-h$, $\frac{1}{2}a+h$. Innoltro l'attenzione al modo, che Diofanto tiene in sciogliere le medesime equazioni, ed osservo che nella XXX in luogo di porre, come noi faremmo, uno dei numeri $=x$, l'altro $=20-x$, pone il minore $=10-x$, il maggiore $=10+x$, appunto come richiede la corrispondenza con il teorema 5.°, onde ne segue l'equazione $96+x^2=100$, che non è che lo stesso teorema nel caso particolare. Similmente nella quistione XXXI, posto il numero minore $=10-x$, il maggiore $=10+x$ conformemente al soggetto del teorema 9.°, riesce all'equazione $(10-x)^2+(10+x)^2=2\times10^2+2x^2$ in chiaro esempio rappresentante esso teorema medesimo. Nè altrimenti nella XXXIII con porre il minor numero $= x - 2$, il maggiore $= x + 2$ riduce con tal artifizio esattamente la quistione al teorema 5.°, e trova l'equazione $96 + 4 = x^2$ in esso contenuta. O le condizioni dunque si considerino da Diofanto apposte alle sue quistioni, o il modo di scioglierle, appariscono da' teoremi 5.° e 9.° del libro II di Euclide formate, cosicchè per ogni verso, ed a tutte tre ugualmente quadra bene in passivo senso il titolo di *Plasmatiche*. All'incontro il dirle *Plasmatiche* in attivo senso, in quanto che da esse si formino le regole per lo scioglimento delle equazioni complete di secondo grado, incontra varj obbietti: il primo de' quali si è l'inventare, che la voce *Plasmaticum* sia intrusa nella quistione XXXI. Secondariamente sembra difficile, che se Diofanto inteso avesse di chiamar *Plasmatiche* le quistioni XXX, XXXIII, siccome quelle, dalle quali formar si dovessero le composte regole, in tante volte che di queste fece uso non citasse una volta esse quistioni. Ma per terzo codeste quistioni prestano poi elleno realmente materia plastica a lavorar le analitiche regole composte di secondo grado? Diofanto le scioglie per via di equazioni pure, sfuggendo mercè le posizioni, che adopera, le equazioni complete. Dunque, anzi che materia a formar le regole per sciogliere le equazioni complete di secondo grado, dir si dovrebbe, che in esse quistioni materia si porge a formar la regola per isfuggirle. Ma neppur ciò: poichè le posizioni da Diofanto usate non si possono trasportare ad ogni caso, e non segnano una strada generale, ma affatto particolare, della quale non si sa come far uso, sol che propongasi di trovar un numero, al quadrato del quale aggiugnendo il prodotto di esso in 6 provenga 16; problema il più semplice e più immediato dell'equazione di secondo grado $x^2 + 6x = 16$. Forse che ha voluto Diofanto, che confrontando la equazion pura nata dal suo modo di porre, per esempio nella quistion XXX l'equazione $x^2 = 100 - 96$ nata dal porre il minor numero $= 10 - x$, il maggiore $= 10 + x$, con l'equazione completa $20x - x^2 = 96$, che produce il porre nel modo più naturale uno dei due numeri $= x$, l'altro $= 20 - x$: ha forse, dicea, voluto Diofanto, che confrontando queste due equazioni, dal provento della risoluzion della pura s'inducesse la regola di risolvere la completa? Questo in sostanza è il parer di Bacheto. Ma non mi par cosa degna di Diofanto l'aver voluto, che a mera induzion si appoggiasse la regola di sciogliere le equazioni complete di secondo grado; non mi par probabile, che con una semplice parola, *Plasmaticum*, abbia voluto significare una formazione sì rimota, e sì indiretta. Per le quali cose tutte si fa manifesto, che quanto bene al vocabolo *Plasmaticum* nelle tre quistioni di Diofanto, attese tutte le loro parti, si accomoda il passivo senso di cosa altronde, cioè dai teoremi 5.° e 9.° del libro II di Euclide, formata; altrettanto mal si tenta di adattargli il senso attivo di cosa, onde altra, cioè la regola di sciogliere le equazioni complete di secondo grado, si forma. E se pur vi fosse cui piacesse adattarglielo, osservi per fine, che Diofanto non dice mai *hoc mihi Plasmaticum*, ma senza nulla a sè attribuire *hoc Plasmaticum*.

CAPO V.

QUADRI DUE ALGEBRAICI.

I.

Dei principj dell'analisi aritmetica di Diofanto riguardante i numeri quadrati e cubici.

II.

Del libro su i numeri quadrati di Leonardo Pisano.

Io non so che esista in luce un quadro in algebraiche spezie, il quale con il vantaggio del trasporto dal numerico particolare al generale presenti in ristretto i porismi agli *Elementi* di Euclide superiori, che Diofanto nella sua semideterminata analisi suppone, e gli artifizj, onde la semplice, e la doppia ugualità adempie. Io vo ad esporlo in confronto di altro quadro della dottrina di Leonardo Pisano su i numeri quadrati, una stessa essendo la materia. Ed oltre che tornerà utile il confronto nella controversia, a cui sono avviato, gli studiosi della diofantea analisi trarranno da ambi i quadri lume, ed estendimento di cognizioni.

QUADRO I.

PARTE I.

Porismi diofantei agli euclidei Elementi superiori.

1.° Se m, n, p sieno tre numeri, due de' quali qualunque superino il terzo, la somma degli eccessi di due paja sopra il terzo è doppia di quello, che non ha fatto da terzo: così $m + n - p + m + p - n = 2m$. E se quattro sieno i numeri m, n, p, q, la somma degli eccessi di due ternarj sopra il quarto è doppia della somma dei due numeri, che non han fatto da quarto: per esempio $m + n + p - q + m + n + q - p = 2(m + n)$.

2.° Se $x^2 : y : z^2$ sarà in primo luogo $y - x^2 = (z - x)x$, e $z^2 - y = (z - x)z$; in secondo luogo formate le tre quantità $\frac{x^2 \pm n}{z - x}$, $\frac{y \pm n}{z - n}$, $\frac{z^2 \pm n}{z - x}$, sarà $\frac{y \pm n}{z - x} - \frac{x^2 \pm n}{z - x} = x$. E $\frac{z^2 \pm n}{z - x} - \frac{y \pm n}{z - x} = z$. Riflettasi essere $y = xz$, e sostituendo si renderanno con breve calcolo manifeste queste due verità.

3.° Se prendansi due numeri n, $n + 1$, sarà in primo luogo $(n+1)^2 - n^2 =$ alla somma $n + n + 1$; in secondo luogo $n + 1 + n(n+1) = (n+1)^2$; in terzo luogo $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - n$ sarà quadrato; in quarto luogo sarà quadrato l'aggregato $n^2 \times (n + 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2$, trovandosi di fatto $= n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1 = (n^2 + n + 1)^2$. Dipendon queste verità dalla 4.ª del II di Euclide.

4.° $y^2 - z^2 = (y + z)(y - z)$; è $y = \frac{y + z + y - z}{2}$, $z = \frac{y + z - (y - z)}{2}$. È un corollario della 5.ª del II di Euclide: la quantità intera è $2y$, e z l'intervallo dalla metà a ciascuna delle parti disuguali $y + z$, $y - z$.

5.° La formola universale di un triangolo rettangolo numerico è $x^2 = y^2 + z^2$. La general espressione della maniera, onde formarlo è $(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$. Se prendasi $(pm^2 - pn^2)^2 = (pm^2 - pn^2)^2 + (2pmn)^2$, si avrà un triangolo rettangolo simile. Anche questa espressione si può considerare qual espression generica della formazion di un triangolo rettangolo numerico. Poichè pertanto $pm^2 = m \times pm$, $pn^2 = n \times pn$ sono due numeri piani simili, apparisce: dati due numeri piani simili potersi sempre formare un triangolo rettangolo.

6.° Ogni ipotenusa componesi di due numeri piani simili. Dalla formola universale $x^2 = y^2 + z^2$ si tira $\frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{4}(x^2 - z^2) = \frac{1}{2}(x + z) \times \frac{1}{2}(x - z)$: onde $\frac{1}{2}(x + z) : \frac{1}{2}y : \frac{1}{2}(x - z)$, continua proporzion, che dimostra $\frac{1}{2}(x + z)$, $\frac{1}{2}(x - z)$ due numeri piani simili. Per la qual cosa essendo $x = \frac{1}{2}(x + z) + \frac{1}{2}(x - z)$, è l'ipotenusa x la somma di due numeri piani simili.

7.° Qualunque numero q può prendersi per ipotenusa di triangolo rettangolo; poichè si può, e non in un sol modo, ma in più dividere in due parti, che sieno piani simili pm^2, pn^2, pigliando nell'equazione $pm^2 + pn^2 = q$ a piacere la ragion quadrata $m^2 : n^2$, ed indi determinando p.

8.° Essendo $i^2 = b^2 + p^2$ un triangolo rettangolo, ed $I^2 = B^2 + P^2$ un altro dissimile; sarà $(iI)^2 = (bB \backsim pP)^2 + (bP + Bp)^2$ un triangolo rettangolo da essi composto, e parimenti $(iI)^2 = (bB + pP)^2 + (bP \backsim Bp)^2$.

9.° Se per ipotenusa, base, perpendicolo di un triangolo rettangolo si prendano i, b, p; di un secondo $i' = i^2 + b^2$, $b' = i^2 - b^2$, $p' = 2ib$; di un terzo $i'' = i^2 + p^2$, $b'' = i^2 - p^2$, $p'' = 2ip$: sarà $\frac{p \times p' \times p''}{b \times b' \times b''} = \frac{4i^2}{b^2}$: cioè il prodotto de' perpendicoli al prodotto delle basi in ragion di quadrato a quadrato. Potendosi trasmutare il perpendicolo in base, e viceversa nel secondo triangolo, o nel terzo, od in ambidue insieme, e restando vero il teorema, sarà vero in quattro maniere. Anzi facendo la trasmutazione nel terzo triangolo, si troverà $\frac{p \times p' \times b''}{b \times b' \times p''} = \frac{p^4}{b^4}$, in ragione cioè di quadrato-quadrato a quadrato-quadrato. Si verificherà pure il teorema, se invece di uno, o di due, o di tutti e tre gli esposti triangoli se ne prendano di simili.

10.° Si formino quattro triangoli rettangoli, come segue:

	Ipotenusa	*Base*	*Perpendicolo*
Del 1.°	i	b	p
Del 2.°	$\frac{b^2+4p^2}{b}$	$\frac{b^2-4p^2}{b}$	$\frac{4bp}{b}$
Del 3.°	b^2+4p^2	b^2-4p^2	$4bp$
Del 4.°	b^3+4bp^2	b^3-4bp^2	$4b^2p$

Il piano, o prodotto de' perpendicoli, e quel delle basi congiunti comporran numero quadrato nei due 1.° e 2.°, numero cubo nei 1.° e 3.°, numero quadrato-quadrato nei 1.° e 4.°. Si dirà similmente dell'eccesso del piano dei perpendicoli sopra il piano delle basi, se queste si prendano con termini contrarj, cioè per il triangolo 2.° $\frac{4p^2-b^2}{b}$, per il 3.° $4p^2-b^2$, per il 4.° $4bp^2-b^3$. Si può continuare a piacere la serie de' triangoli moltiplicando per b l'ipotenusa, la base, il perpendicolo del 4.° ad avere il 5.°, e così via via; e sarà la somma, o la differenza dei piani de' perpendicoli e delle basi del 1.° e 5.° un numero quadrato-cubo, e riuscirà un numero cubo-cubo rispetto ai triangoli 1.° e 6.°, e ordinatamente in progresso.

11.° Si costruiscano tre triangoli rettangoli con la legge, che qui si offre all'occhio:

		Base	
Del 1.°	i	b	p
Del 2.°	$\frac{b^2+4p^2}{b}$	$\frac{b^2-4p^2}{b}$	$\frac{4bp}{b}=4p$
Del 3.°	$\frac{ib^2+4ip^2}{b}$	$\frac{b\cdot 4bp-p(b^2-4p^2)}{b}$	$\frac{p\cdot 4bp+b(b^2-4p^2)}{b}=b^2$

sarà $\frac{i(b^2+4p^2)(ib^2+4ip^2)}{b^2}:p\times 4p\times b^2=\frac{i^2(b^2+4p^2)^2}{b^2}:4p^2b^2$; cioè il solido delle ipotenuse al solido dei perpendicoli in ragion di quadrato a quadrato.

12.° Tutti i numeri quadrati interi hanno una delle due seguenti forme: o $4n^2 = (2n)^2$; o $4(n^2+n)+1 = (2n+1)^2$. Ed essendo $4(n^2+n)+1 = 8\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+1$, è chiaro esser la seconda forma l'ottuplo del numero triangolare $\frac{n^2+n}{2}$ con l'aggiunta $+1$.

13.° Qualunque numero intero è l'aggregato di quattro, o di un minor numero di quadrati interi. Io non ardirei attribuire a Diofanto di tal verità altro conoscimento che per induzione; poichè la dimostrazion assoluta ha richiesti gli sforzi di un la Grange (1) dietro quelli di un Eulero, al quale non riuscì che di aprire il sentiero (2).

14.° Un numero della forma $3(8m+2)+1$ non può esser quadrato, nè composto di due, o tre quadrati; ma è composto di quattro quadrati interi. Riducendosi $3(8m+2)+1$ a $4(6m+1)+3$, è evidente non poter essere un numero di tal fatta quadrato semplice; nè la somma di due, sia della forma $4n^2$, sia dell'altra $4(n^2+n)+1$; nè la combinazion di un della prima, e di uno della seconda; nè l'aggregato di due della prima, e di uno della seconda, o viceversa; nè di tre della prima: e non resta a dimostrare, se non che non poter esser composto di tre quadrati della seconda forma $4(n^2+n)+1$, che, come ho detto, equivale a $8\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+1$. Lo sia: dunque da $4(6m+1)+3$ detratte le tre unità, dovrà il residuo $4(6m+1) = 8 \times 3m+4$ essere divisibile per 8; il che è impossibile. Riman dunque dimostrato, che un numero $3(8m+2)+1$ non è quadrato, nè composto di due, di tre interi quadrati. Egli è però composto di quattro; e può esserlo in più maniere. Così $31 = 1+1+4+25 = 4+9+9+9$. E $55 = 1+1+4+49 = 1+9+9+36$.

(1) *Accad. di Berlino an.* 1770. (2) *Nuov. Com. Pietrob.* tom. v.

15.° Se il numero n sia $=a^2+b^2$, cioè se sia di due quadrati composto, anche $2n$ sarà composto di due quadrati, essendo $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2$; e se a, b sieno entrambi pari, o dispari, eziandío $\frac{1}{2}n$ sarà composto di due interi quadrati, essendo $\frac{1}{2}(a^2+b^2)=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

16.° Supposta la geometrica proporzione $m:n::p:q$, la somma de' quadrati di ciascun termine $m^2+n^2+p^2+q^2$ in due maniere è divisibile in due quadrati, essendo, per ragione di $mq=np$, essa somma tanto $=(m+q)^2+(n-p)^2$, quanto $=(m-q)^2+(n-p)^2$.

17.° Se sia $m=a^2+b^2$, $n=c^2+d^2$, e non sieno i numeri c, d ai numeri a, b proporzionali, il prodotto mn sarà un numero per due modi composto di due quadrati, essendo $mn=a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2$, ed essendo $ac:bc::ad:bd$. Bacheto alla quistione XXII del libro III di Diofanto estende questo porisma da lui ivi usato, assegnando i casi, ne' quali il prodotto mn risulterà in 6, 8, 24 maniere composto di due quadrati. Rechiamo il teorema al generale. Se m sia per numero t maniere divisibile in due quadrati, ed n per maniere numero u, sarà il prodotto mn per maniere numero $2tu$ di due quadrati composto, e in due divisibile: poichè ogni maniera di m si potrà combinare con ogni maniera di n, e ciascuna combinazione darà riguardo al prodotto mn due maniere. Così moltiplicando 325 in tre maniere divisibile in due quadrati con 17 in una sola maniera in due quadrati divisibile, ne proviene 5525 per sei maniere divisibile in due quadrati, e sono:

1.ª $5525=3025+2500=55^2+50^2$	2.ª $5525=3844+1681=62^2+41^2$
3.ª $5525=4900+625=70^2+25^2$	4.ª $5525=5041+484=71^2+22^2$
5.ª $5525=5329+196=73^2+14^2$	6.ª $5525=5476+49=74^2+7^2$

E moltiplicando 5525 in sei maniere composto di due quadrati con 1073 in due maniere di due quadrati composto, ne nasce 5928325 in maniere 24 divisibile in due quadrati, de' quali Bacheto espone la tavola.

18.° Se dei due quadrati x^2, z^2, e del numero n si formi la quantità $\frac{x^2 \pm n}{z - x} \times \frac{z^2 \pm n}{z - x} \mp n$, sarà questa un quadrato, trovandosi di fatto $= \left(\frac{xz \pm n}{z - x}\right)^2$.

19.° Si formino le tre quantità $\frac{x^2 - n}{z - x}$, $\frac{z^2 - n}{z - x}$, $2\left(\frac{x^2 - n}{z - x} + \frac{z^2 - n}{z - x}\right) - (z - x)$: moltiplicando due qualunque di queste tre quantità fra loro, ed al prodotto aggiugnendo n, risulterà quadrato. Per esempio $\frac{x^2 - n}{z - x} \times \left(2\left(\frac{x^2 - n}{z - x} + \frac{z^2 - n}{z - x}\right) - (z - x)\right) + n = \frac{x^2 - n}{z - x} \times \frac{(x + z)^2 - 4n}{z - x} + n = \frac{(x^2 - n)\left((x + z)^2 - 4n\right) + n(z - x)^2}{(z - x)^2} = \frac{(x^2 - xz - 2n)^2}{(z - x)^2}$.

20.° Se delle tre quantità x^2, z^2, $2\left(x^2 + z^2 + (z - x)^2\right)$ si moltiplichino due qualunque tra di loro, ed al provento si aggiunga il prodotto di $(z - x)^2$ con la somma di esse, ovvero con la terza lasciata: nell'uno, e nell'altro modo si ottiene quadrato. Così $x^2 \times z^2 + (z - x)^2 \times (x^2 + z^2) = x^4 - 2x^3z + 3x^2z^2 - 2xz^3 + z^4 = (x^2 - xz + z^2)^2$; ed $x^2 \times z^2 + (z - x)^2 \times 2\left(x^2 + z^2 + (z - x)^2\right) = 4x^4 - 12x^3z + 17x^2z^2 - 12xz^3 + 4z^4 = (2x^2 - 3xz + 2z^2)^2$.

21.° Alle tre or ora esposte quantità aggiungendo $2(z - x)^2$, ne vengono le tre $x^2 + 2(z - x)^2$, $z^2 + 2(z - x)^2$, $2(x^2 + z^2) + 4(z - x)^2$, delle quali moltiplicando due qualunque, e dal prodotto detraendo $(z - x)^2$ moltiplicato con la somma di esse due, o con la terza, risulterà quadrato. Poichè, per esempio, $\left(x^2 + 2(z - x)^2\right) \times \left(z^2 + 2(z - x)^2\right) - (z - x)^2 \times \left(x^2 + z^2 + 4(z - x)^2\right) = x^2z^2 + (z - x)^2 \times (x^2 + z^2) = (x^2 - xz + z^2)^2$, ritornando così la prima parte dell'esempio superiore; ed $\left(x^2 + 2(z - x)^2\right) \times \left(z^2 + 2(z - x)^2\right) - (z - x)^2 \times \left(2(x^2 + z^2) + \right.$

$4(z^2-x)^2)=x^2z^2$. Diofanto non suppone nelle sue quistioni questi ultimi quattro teoremi che rapporto al caso $z-x=1$.

22.° Il cubo $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)=x^3+y^3+3x^2y+3xy^2$; ed $(x-y)^3=x^3-y^3-3xy(x-y)=x^3-y^3-3x^2y+3xy^2$.

23.° L'intervallo di due cubi x^3-y^3 è universalmente divisibile in due cubi. Si ponga di fatto $x^3-y^3=(x-z)^3+\left(\frac{x^2}{y^2}z-y\right)^3$. Si avrà $3xz^2-z^3+\frac{x^6}{y^6}z^3-3\frac{x^4}{y^4}z^2=0$; onde $z=\frac{3xy^3}{x^3+y^3}$. Io non comprendo perchè al general asserire di Diofanto nella quistione XIX del libro V, *Habemus in porismatis omnium duorum cuborum intervallum componi ex duobus cubis*, abbia Bacheto nel comento ad essa, come nel comento alla II del IV trovato necessità d'impor limite, e pronunziare: *Oportet autem duplum minoris cubi non superare majorem*.

PARTE II.

Artifizj di semplice ugualità.

Artifizio di semplice ugualità è: data una funzione di x qual a^2x^2+bx+c, scegliere una forma indeterminata di quadrato, o cubo, alla quale uguagliando essa data funzione, da tale uguagliamento ricavar si possa un razional valor di x idoneo a rendere un quadrato, un cubo la data funzione medesima. Chiamasi artifizio di doppia ugualità, qualora, date due funzioni di x, debbonsi tutte e due ad un tempo, cioè per il medesimo razionale valor di x, recar ad esser quadrato, o cubo.

1.° Far quadrato la funzione $ax+b$. Costituisci $ax+b=y^2$ arbitrario numero quadrato: dall'equazione si tira $x=\frac{y^2-b}{a}$.

2.° Rendere un quadrato la funzione a^2x^2+bx+c. Si ponga $a^2x^2+bx+c=(ax+m)^2$: svolto questo quadrato, scancellato nell'uno, e nell'altro membro dell'equazione a^2x^2, si otterrà l'idoneo razional valore di $x=\frac{m^2-c}{b-2ma}$. È facile trasferir l'artifizio alla funzione $a^2+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$.

3.° Recare ad esser quadrato la funzione ax^2+bx+c^2. Supponi $ax^2+bx+c^2=(mx+c)^2$.

4.° Rendere quadrato la funzione mx^2+nx. Pongasi $=(px)^2$.

5.° Si può in infiniti modi render quadrato cx^2+d, se sia la somma $c+d$ un quadrato, che dinotisi per n^2. Poichè primieramente sarà cx^2+d quadrato, fatto $x=1$; indi si faccia $x=z+1$, ne verrà $cx^2+d=cz^2+2cz+c+d=cz^2+2cz+n^2$, che si condurrà in infinite maniere ad esser quadrato per l'artifizio esposto al num. 3.°.

6.° Nell'equazione $bx+c=(n^2+1)x^2$ essendo ad arbitrio n, determinarlo in guisa, che x risulti razionale. Il problema si riduce a rendere razionale $\sqrt{\left((n^2+1)c+\frac{1}{4}b^2\right)}$, o sia a render quadrato $cn^2+c+\frac{1}{4}b^2$: lo che riuscirà di effettuare in tre casi: nel caso, che c sia numero quadrato per l'artifizio secondo; nel caso, che sia quadrato la somma $c+\frac{1}{4}b^2$ per il terzo; e nel caso, che quadrato sia la somma $2c+\frac{1}{4}b^2$ per il quinto.

7.° Fare, che divenga quadrato la funzione di quarto grado $a^2x^4+bx^3+cx^2+dx+1$. Con due posizioni diverse si può ciò adempiere: 1.ª ponendo $a^2x^4+bx^3+cx^2+dx+1=(ax^2+\frac{1}{2}dx+1)^2$, con che si distruggeranno i termini 1.°, 4.°, 5.°; 2.ª ponendo $a^2x^4+bx^3+cx^2+dx+1=(ax^2+\frac{b}{2a}x\pm1)^2$, con che anderan distrutti i termini 1.°, 2.°, 5.°.

8.° Rendere quadrato la funzione di sesto grado $x^6 - 2p^3x^3 + n^2x + p^6$. Ponila $= (x^3 + p^3)^2$.

9.° Fare cubo la funzione $mx^3 + nx^2$. Si ponga $= (px)^3$.

10.° Recare ad esser cubo la funzione $m^3x^3 + nx^2 + px + q^3$. Supponila $= (mx + q)^3$.

PARTE III.

Artifizj di doppia ugualità simile.

Intendo per artifizio di doppia ugualità simile, quando date due funzioni di x si tratta di renderle ad un tempo, cioè per lo stesso razionale valore di x, o ambedue quadrati, o ambedue cubi.

Artifizio I. *Esempio I.* Rendere quadrati ad un tempo le due funzioni $hx + n^2$, $(h+f)x + n^2$. Si dispongan con ordine dalla maggiore alla minore le tre quantità: 1.ª $(h+f)x + n^2$... 2.ª $hx + n^2$... 3.ª n^2. Si ha $1^a - 2^a = fx$; $2^a - 3^a = hx$; e $1^a - 2^a : 2^a - 3^a :: f : h$. Suppongasi $hx + n^2 = (y+n)^2$, e ne seguirà $(y+n)^2 - n^2 = y^2 + 2ny = 2^a - 3^a$; e quindi $\frac{f}{h}(y^2 + 2ny) = 1^a - 2^a$; onde $1^a = \frac{f}{h}(y^2 + 2ny) + (y+n)^2 = \left(\frac{f}{h} + 1\right)y^2 + 2n\left(\frac{f}{h} + 1\right)y + n^2$. Il problema è ridotto a rendere quadrato questa funzione. Pongasi essa $= (py - n)^2$: si trarrà quinci il valor di y, e poi dall'equazione $(h+f)x + n^2 = (py - n)^2$, ovvero dalla $hx + n^2 = (y+n)^2$ si conseguirà in varj modi, variato p, il valor di x desiderato. Similmente si operi venendo proposto di fare insieme quadrati le due funzioni $n^2 - hx$, $n^2 - (h+f)x$ con l'avvertenza sola, che a disporle giusta la stessa legge dalla maggiore alla minore l'ordine sarà $1^a\, n^2$... $2^a\, n^2 - hx$... $3^a\, n^2 - (h+f)x$. E se le funzioni date fossero $n^2 - hx$, $n^2 + lx$, l'ordine di disposizione verrà ad essere $1^a\, n^2 + lx$... $2^a\, n^2$... $3^a\, n^2 - hx$.

Esempio II. Fare quadrati congiuntamente le due funzioni $hx+n^2$, $lx+m^2$. Si moltiplichi la prima per m^2, e reciprocamente la seconda per n^2, e provenendone $m^2hx+m^2n^2$, $n^2lx+m^2n^2$, il problema caderà nell'antecedente.

Esempio III. Rendere congiuntamente quadrati le funzioni $ax+b$, $cx+d$. Ciò si effettuerà per l'esempio 1.° qualora sia $d-\frac{c}{a-c}(b-d)$, od $\frac{ad-cb}{a-c}$ un quadrato, il qual dinotisi per r^2. Poichè supposto $ax+b>cx+d$ si dispongano in ordine le tre grandezze: 1.^{a} $ax+b$... 2.^{a} $cx+d$.... 3.^{a} r^2: sarà $1^a-2^a=(a-c)x+b-d$; $2^a-3^a=cx+d-r^2$; e dividendo 1^a-2^a per 2^a-3^a ne proverrà $\frac{a-c}{c}+\frac{\frac{a-c}{c}(r^2-d)+b-d}{cx+d-r^2}$, il qual quoziente si ridurrà ad $\frac{a-c}{c}$ simile al quoziente $\frac{f}{h}$ nell'esempio 1.°, se sia $\frac{a-c}{c}(r^2-d)+b-d=0$, cioè $r^2=d-\frac{c}{a-c}(b-d)$. Si porrà $cx+d=(y+r)^2$, e proseguendo come nell'esempio 1.° si giugnerà a trovare la funzion 1.^{a} $ax+b=\frac{a}{c}y^2+\frac{2ar}{c}y+r^2$, che si recherà a quadrato ponendola $=(py-r)^2$.

Se $d-\frac{c}{a-c}(b-d)$ sia quantità negativa, e se presa anche a rovescio non sia $\frac{c}{a-c}(b-d)-d$ quadrato; ciò nulladimeno potrannosi le due funzioni $ax+b$, $cx+d$ rendere congiuntamente quadrate, sol che $\frac{c}{a-c}(b-d)-d$ sia ad $\frac{a-c}{c}$ in ragion di quadrato a quadrato; dal che segue che $\left(\frac{c}{a-c}(b-d)-d\right)\times\frac{a-c}{c}=b-d-d.\frac{a-c}{c}=\frac{bc-da}{c}$ divenga un quadrato. Ma in tal caso bisogna cangiare del 1.° esempio il primo passo. Dinotata per $-l$ la quantità $d-\frac{c}{a-c}(b-d)$, indicato per q^2 il quadrato $\frac{bc-da}{c}$, ed ordinate le grandezze: 1.^{a} $ax+b$... 2.^{a} $cx+d$... 3.^{a} $-l$, delle quali successivamente le differenze sono $1^a-2^a=(a-c)x+b-d$; $2^a-3^a=cx+d+l$, ed il rapporto $\frac{1^a-2^a}{2^a-3^a}=\frac{a-c}{c}$: si ponga $cx+d=y^2$, sarà $2^a-3^a=$

$y^2 + l$, quinci $1^a - 2^a = \frac{a-c}{c}(y^2 + l)$; conseguentemente $1^a = \frac{a-c}{c}(y^2 + l) + y^2 = \frac{a}{c}\, y^2 + \frac{a-c}{c} \times l = \frac{a}{c}\, y^2 + q^2$, che si porrà $= (q - k\, y)^2$. L'antecedente problema, e questo non sono propiamente di Diofanto, ma una giunta di Bacheto. Siccome però le risoluzioni di essi dal 1.° artifizio di Diofanto si derivano, così alla fonte ho stimato doverli riportare, accompagnandoli della intrinseca dimostrazione da Bacheto non tocca delle condizioni a poter essere rivi di essa. Additerò anzi brevemente eziandío a che in fondo riducasi lo stesso 1.° artifizio di Diofanto. Posta la funzion $h\,x + n^2 = (y + n)^2$, trasportisi il valor quinci proveniente di $x = \frac{1}{h}(y^2 + 2\,n\,y)$ nell'altra data funzione $(h + f)\,x + n^2$, e si cangerà questa immediatamente in $\left(\frac{f}{h} + 1\right) y^3 + 2\,n \left(\frac{f}{h} + 1\right) y + n^2$. Con simil metodo supposta $c\,x + d = (y + r)^2$, e trasferita la di qua dedotta espressione di $x = \frac{1}{c}(y^2 + 2\,r\,y + r^2 - d)$ nella funzion $a\,x + b$ si trova $\frac{a}{c}\, y^2 + \frac{2\,a\,r}{c}\, y + \frac{a\,r^2 + b\,c - a\,d}{c}$, la quale si potrà recare al quadrato $(p\,y - r)^2$ se sia $\frac{a\,r^2 + b\,c - a\,d}{c} = r^2$, cioè $r^2 = \frac{a\,d - b\,c}{a - c}$. E non altrimenti fatta $c\,x + d = y^2$, e sostituto il valor $x = \frac{y^2 - d}{c}$ in $a\,x + b$, ne viene $\frac{a}{c}\, y^2 + \frac{b\,c - a\,d}{c}$ facile a rendersi quadrata se sia $\frac{b\,c - a\,d}{c}$ un quadrato. Ecco per via diretta, immediata, speditissima determinate le condizioni dei problemi di Bacheto, ed in aspetto assoluto qui, siccome sopra in aspetto relativo al primo artifizio di Diofanto, spiegata l'intima loro ragione.

Artifizio II. Fondasi questo sul quarto porisma.

Esempio I. Rendere quadrati ad un tempo le due funzioni $f\,x + m$, $f\,x + n$. Supposto $m > n$, ed intendendo per y^2, z^2 due quadrati diversi, de' quali $y^2 > z^2$ facciasi $f\,x + m = y^2$, $f\,x + n = z^2$. Sottraggasi dalla prima la seconda equazione, con che ne verrà $m-n=y^2-z^2=(y+z)(y-z)$. Dividasi $m-n$ in due fattori a, $\frac{m-n}{a}$, e pongasi $a=y+z$, $\frac{m-n}{a}=y-z$, si avrà $\frac{1}{2}\left(a+\frac{m-n}{a}\right)=y$, $\frac{1}{2}\left(a-\frac{m-n}{a}\right)=z$. Quinci $fx+m=\frac{1}{4}\left(a+\frac{m-n}{a}\right)^2$, $fx+n=\frac{1}{4}\left(a-\frac{m-n}{a}\right)^2$: dall'una, e dall'altra di queste due equazioni si caverà lo stesso razionale valore di x, che soddisfarà all'intento.

Esempio II. Fare congiuntamente quadrati le due funzioni fh^2x+m, $fx+l$. Si moltiplichi questa seconda per h^2, e nel prodotto fh^2x+lh^2 considerando $lh^2=n$ si ricaderà nel caso superiore.

Esempio III. Recare ad esser quadrati unitamente le due funzioni g^2x^2+fx+m, g^2x^2+hx+m, essendo m numero non quadrato. Supponendo $f>h$, ed indicato per y^2 il quadrato, a cui si cerca recar la prima funzione, e per z^2 quello, a cui riuscirà la seconda, si trova $y^2-z^2=(f-h)x$. Si faccia $(y+z)(y-z)=2gx\times\frac{f-h}{2g}$; onde $y=gx+\frac{f-h}{4g}$, $z=gx-\frac{f-h}{4g}$: conseguentemente $g^2x^2+fx+m=\left(gx+\frac{f-h}{4g}\right)^2$, $g^2x^2+hx+m=\left(gx-\frac{f-h}{4g}\right)^2$: dall'una, e dall'altra delle quali equazioni si trarrà lo stesso valor razionale di x conforme al desiderio. Se m fosse un numero quadrato t^2, potrebbe accadere che fosse $\frac{f-h}{4g}=t$, e il metodo diverrebbe illusorio, e porterebbe, anzi che al bramato effetto, ad un assurdo. Così se le due funzioni fossero x^2+9x+4, x^2+x+4, sarebbe $\frac{9-1}{4}=2=\sqrt{4}$, $y=x+2$, $x^2+9x+4=(x+2)^2$; $9x=4x$; il che è assurdo. Può bensì essere $m=-t^2$, cioè un numero quadrato negativamente preso.

Esempio IV. Fare ad un tempo $x^2+m=y^2$, $fx+m=z^2$. Si avrà $y^2-z^2=x^2-fx$; $(y+z)(y-z)=x(x-f)$; $y=x-\frac{1}{2}f$, $z=\frac{1}{2}f$. Dall'equazione più semplice $fx+m=z^2=\frac{1}{4}f^2$ determinato il valore di $x=\frac{1}{4}f-\frac{m}{f}$ prenderà per questo natura di quadrato anche la funzione x^2+m, divenendo $=\frac{1}{16}f^2-\frac{1}{2}m+\frac{m^2}{f^2}+m=\left(\frac{1}{4}f+\frac{m}{f}\right)^2$.

Esempio V. Rendere congiuntamente $g^2x^2+lx+m=y^2$, $g^2x^2+hx=z^2$, essendo m numero non quadrato. Sarà $y^2-z^2=(l-h)x+m$; $(y+z)(y-z)=\left(x+\frac{m}{l-h}\right)(l-h)=\left(2gx+\frac{2gm}{l-h}\right)\left(\frac{l-h}{2g}\right)$: onde $y=gx+\frac{gm}{l-h}+\frac{l-h}{4g}$, $z=gx+\frac{gm}{l-h}-\frac{l-h}{4g}$.

Esempio VI. Fare insieme $g^2x^2+hx+m=y^2$, $g^2x^2+n=z^2$. Avendosi $y^2-z^2=hx+m-n$, sarà $(y+z)(y-z)=\left(x+\frac{m-n}{h}\right)h=\left(2gx+\frac{2g(m-n)}{h}\right)\times\frac{h}{2g}$; $y=gx+\frac{g(m-n)}{h}+\frac{h}{4g}$, $z=gx+\frac{g(m-n)}{h}-\frac{h}{4g}$.

Esempio VII. Condurre ad un tempo ad esser quadrati le funzioni x^2+lx+p^2m, $hx+m$. Moltiplica questa per p^2, e posta $x^2+lx+p^2m=y^2$, $p^2hx+p^2m=z^2$, sarà $y^2-z^2=x^2+(l-p^2h)x$; $(y+z)(y-z)=x(x+l-p^2h)$; $y=x+\frac{1}{2}(l-p^2h$, $z=\frac{1}{2}(p^2h-l)$.

Artifizio III. Trarre a natura quadrata ambedue insieme le funzioni px^2+mx, qx^2+nx, nelle quali p, q non sono numeri quadrati. Egli è facilissima cosa il render quadrato una sola di tali funzioni, come si è all'artifizio 4.° di semplice ugualità veduto; ma non è così del trovar un valor razionale di x, che porti ad un tempo a forma quadrata due di esse funzioni. Il metodo da Diofanto adoperato nei sette casi testè schierati vien meno in questo, anche nella più semplice ipotesi di $p=q$. Di fatto posto

$px^2+mx=y^2$, $px^2+nx=z^2$, ne verrebbe $y^2-z^2=(m-n)x$; $(y+z)(y-z)=2x\sqrt{p}\times\frac{m-n}{2\sqrt{p}}$; $y=x\sqrt{p}+\frac{m-n}{4\sqrt{p}}$, $z=x\sqrt{p}-\frac{m-n}{4\sqrt{p}}$: onde $px^2+mx=\left(x\sqrt{p}+\frac{m-n}{4\sqrt{p}}\right)^2=px^2+\frac{(m-n)x}{2}+\frac{(m-n)^2}{4^2p}$, e quinci $x=\frac{(m-n)^2}{8p(m+n)}$; e perciò sostituendo $px^2+mx=\frac{p(m-n)^4}{8^2p^2(m+n)^2}+\frac{m(m-n)^2}{8p(m+n)}=\frac{(m-n)^2}{4(m+n)^2}\times\frac{(3m+n)^2}{4^2p}$: dove si vede, che non essendo il denominatore 4^2p quadrato, la trasformazione per conseguenza di px^2+mx in quadrato non è adempita. Non lascia tuttavía Diofanto di proporsi tal quistione, che richiegga di far congiuntamente quadrati due funzioni della forma px^2+mx, px^2+nx; e di questa sorta è la quistione XIII del libro VI: trovar un triangolo rettangolo, all'area del quale aggiugnendo uno, o l'altro dei cateti, l'aggregato riesca quadrato. Ecco com'egli si conduce, e supera la difficoltà. Sia $r^2=t^2+u^2$, cioè sieno r, t, u tre numeri qualunque costituenti un triangolo rettangolo. Si prendano per ipotenusa, e cateti del ricercato triangolo rettangolo rx, tx, ux: sarà l'area $\frac{1}{2}tux^2$, e dovranno essere ad un tempo $\frac{1}{2}tux^2+tx$, $\frac{1}{2}tux^2+ux$ quadrati. Suppongasi $t>u$. Piglisi un quadrato $z^2>\frac{1}{2}tu$, o sia $=\frac{1}{2}tu+h$, e si ponga $\frac{1}{2}tux^2+tx=\left(\frac{1}{2}tu+h\right)x^2$: onde $x=\frac{t}{h}$. Per divenir quadrato anche $\frac{1}{2}tux^2+ux$, dovrà essere quadrato $\frac{1}{2}tu\left(\frac{t}{h}\right)^2+\frac{ut}{h}=$

$$\frac{\frac{1}{2}tu.t^2+tuh}{h^2}=\frac{tuz^2+\frac{1}{2}tu.t(t-u)}{\left(z^2-\frac{1}{2}tu\right)}.$$

Trattasi di render quadrato il numeratore; lo che per l'artifizio 5.° di semplice ugualità in infiniti modi si ottiene, qualora sia $tu+\frac{1}{2}tu.t(t-u)$ un quadrato. Il perchè la quistion si riduce a trovar un triangolo rettangolo tale, che il prodotto dei cateti

$tu +$ il solido dell'area $\frac{1}{2}tu$, del maggiore cateto t, e dell'eccesso $t - u$ di questo sopra il minore u formino congiuntamente un quadrato. Dividendo per t resta $u + \frac{1}{2}tu(t-u)$; onde se t prendasi quadrato, basterà che anche $u + \frac{1}{2}tu(t-u)$ sia quadrato: e così il problema per secondo riducesi a trovare un triangolo rettangolo, nel quale essendo il cateto maggiore un numero quadrato, lo sia insieme l'aggregato del minore con il prodotto dell' area nell'eccesso del maggiore sopra il minore. Questo aggregato $u + \frac{1}{2}tu(t-u)$ sarà di nuovo per l'artifizio 5.° di semplice ugualità quadrato, e lo sarà anzi per infiniti modi, qualora $t - u$ sia quadrato, e sialo unitamente la somma $u + \frac{1}{2}tu$. Dunque per terzo il problema riducesi a ritrovare un triangolo rettangolo, del quale il cateto maggiore t sia quadrato, l'eccesso di esso sopra il minore cioè $t - u$ sia parimenti quadrato, ed altresì l'aggregato del minore con l'area vale dire $u + \frac{1}{2}tu$. Sia $r = a^2 + b^2$, $t = 2ab$, $u = a^2 - b^2$; per lo che dovrà essere $2ab > a^2 - b^2$, supposto essendosi $t > u$. Se sia $a = 2b$, sarà $t = 2ab = 4b^2$, quadrato; $t - u = 4b^2 - (a^2 - b^2) = 4b^2 - 3b^2 = b^2$, quadrato; debbe in oltre essere $\frac{4b^2 \times 3b^2}{2} + 3b^2 = 6b^4 + 3b^2$ quadrato; il che per fin si riduce al dover esser quadrato $6b^2 + 3$, ciò che, essendo $6 + 3 = 9$ quadrato, può per il più volte citato artifizio 5.° di semplice ugualità in maniere infinite mandarsi ad effetto. Qual ingegno in questa soluzione, in questa gradazion di riduzioni di Diofanto! Con maestría insomma riduce egli il problema di rendere ad un tempo di quadrata condizione le due funzioni $px^2 + mx$, $px^2 + nx$ al problema di semplice ugualità di far quadrato la funzione $cx^2 + d$, ancorchè nè c, nè d sia numero quadrato. Nella quistion di Diofanto essendo m, n cateti, e p aja di triangolo rettangolo, hanno de' vincoli tra loro; pure sono in complesso lasciati all'arbitrio, e l'artifizio di Diofanto consiste nello sceglierli tali, che in ultimo ne provenga una funzione cx^2+d, nella quale la somma $c+d$ sia quadrato: il che ottenuto, siccome essa funzione può per infiniti modi recarsi a quadrato; così la quistione una copia d'innumerevoli scioglimenti riceve. Essendo all'incontro m, n, p numeri dati, il calcolo su le tracce di Diofanto porterebbe alla funzione $mnz^2+pm(m-n)$; e più generalmente proposte le due funzioni px^2+mx, qx^2+nx per la via medesima si perverrebbe alla funzione $mnz^2+m(qm-np)$. Dunque per il metodo di Diofanto le due funzioni px^2+mx, px^2+nx si potranno per infinite maniere recare a quadrata forma, non solo ne' casi, che separatamente sia una delle due quantità mn, $pm(m-n)$ quadrato, ma per terzo anche nel caso, che sia almeno quadrato la somma loro $mn+pm(m-n)$. E similmente per modi infiniti potrannosi all'esser di quadrato condurre le due funzioni più ampie px^2+mx, qx^2+nx in tre casi: 1.°, che mn sia quadrato: 2.° che lo sia $m(qm-np)$: 3.°, che il sia la somma $mn+m(qm-np)$. Il celebre la Grange nel paragrafo VI delle sue addizioni all'analisi indeterminata dell'Eulero, che forma il tomo II degli Elementi di Algebra, facendo nelle funzioni px^2+mx, qx^2+nx la indeterminata $x=\frac{1}{X}$, e di tal guisa cangiandole in $\frac{p+mX}{X^2}$, $\frac{q+nX}{X^2}$, riduce il problema di render quadrati quelle due al problema di render quadrati le due $p+mX$, $q+nX$. E ponendo $p+mX=z^2$, $q+nX=y^2$, ed eliminando X ne trae $mq-np=my^2-nz^2$; onde $my^2=nz^2+mq-np$, ed $m^2y^2=mnz^2+m(mq-np)$: cosicchè il problema riducesi a render quadrato la funzione $mnz^2+m(mq-np)$. E perciò il sentiero battuto dal la Grange, quantunque diverso da quello di Diofanto, mette alla stessa riduzione. Vero è però, che siccome il la Grange nell' indagare antecedentemente i casi, ne' quali è dato di far in genere quadrato la funzione Az^2+B, oltre ai due casi di A, o di B quadrato, assegna una sfera di casi più ampia che non è il terzo caso da Diofanto contemplato dell' esser la somma $A+B$ numero quadrato; così fornisce egli il la Grange una risoluzione più estesa del problema di rendere ad un tempo di quadrata forma le due funzioni px^2+mx, qx^2+nx.

PARTE IV.

Artifizj di doppia ugualità dissimile.

Diofanto, oltre a rendere ad un tempo quadrati due funzioni di x, prende in alcune quistioni a rendere una di esse funzioni quadrato, l'altra cubo. Gli artifizj, che a ciò adopera, son quelli, che io chiamo di doppia ugualità dissimile, per distinguerli dai superiori, che ho chiamati di doppia ugualità simile, e le denominazioni mi sembrano esprimer assai bene la differenza. Bacheto ne' suoi comenti non assegna che una classe di doppia ugualità, quella cioè da me appellata simile; dietro Bacheto sono andati tutti gli analisti. Il la Grange nelle sue sottili addizioni all'analisi indeterminata di Eulero prende nel paragrafo VI a versar su le doppie ugualità e su le triple, ma arrestasi alle simili, senza muover parola su le dissimili, e non so, che alcuno accinto siasi ad esercitare su di esse l'ingegno. Diofanto ne porge pochi esempj e facili, ma che pur meritano di essere considerati. Io gli esporrò, additando anche le quistioni, nelle quali li tratta.

1.° Fare al tempo medesimo $x = y^2$, $x + 2 = z^3$. Si prenda $y = u + 1$, $z = u - 1$; ne verrà $(u+1)^2 + 2 = (u-1)^3$; quindi $u^3 + u = 4u + 4$, o sia $(u^2 + 1)u = (u^2 + 1)4$, e perciò $u = 4$: onde $x = y^2 = (u + 1)^2 = 25$.... Libro VI quist. XIX.

2.° Rendere reciprocamente $x = y^3$, $x + 2 = z^2$. Si pigli $y = u - 1$, $z = \frac{3}{2} u + 1$; ne seguirà $u^3 - 3u^2 + 3u + 1 = \frac{9}{4} u^2 + 3u + 1$: laonde $u = 5\frac{1}{4}$, $y = u - 1 = 4\frac{1}{4}$, $x = y^3 = \left(\frac{17}{4}\right)^3 = \frac{4913}{64}$. E di fatto $\frac{4913}{64} + 2 = \frac{5041}{64} = \left(\frac{71}{8}\right)^2$.... Lib. VI quist. XX.

3.° Effettuare ad un tempo $2x + 1 = y^2$, $4x + 2 = z^3$. Essendo $4x + 2 = 2(2x + 1)$, sarà $2y^2 = z^3$, e perciò si verificherà prendendo $y = z = 2$; onde $x = \frac{y^2 - 1}{2} = \frac{4 - 1}{2} = \frac{3}{2}$.... Lib. VI quist. XXI.

4.° Reciprocamente verificare $4x + 2 = y^2$, $2x + 1 = z^3$. Sarà $2z^3 = y^2$; lo che si ottiene prendendo $z = 2$, $y = 4$, e conseguentemente $x = \frac{z^3 - 1}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$..... Libro VI quist. XXII.

5.° Adempiere ad un tempo le due equazioni $2x^2 + 2x = y^2$, $x^3 + 2x + 2 = z^3$. Si prenda $y^2 = p^2 x^2$: quindi $2x + 2 = p^2 x$, $x = \frac{2}{p^2 - 2}$; e sostituendo nella seconda equazione $\frac{8}{(p^2-2)^3} + \frac{2 \cdot 4}{(p^2-2)^2} + \frac{2}{p^2-2} = \frac{2p^4}{(p^2-2)^3} = z^3$. Si assuma $z^3 = \frac{p^3 q^3}{(p^2-2)^3}$, e si tirerà $p = \frac{1}{2} q^3$, ed indi $x = \frac{8}{q^6 - 8}$.

QUADRO ALGEBRAICO II.

Del libretto De numeris quadratis *di Leonardo Pisano*.

Le dottrine di Leonardo vestite delle algebraiche spezie acquisteranno, siccome quelle di Diofanto, luce ed ampiezza, od anzi estensione senza confine.

PARTE I.

Generazioni de' numeri quadrati.

1.ª La generazione primaria, e più ovvia de' numeri quadrati è la moltiplica di qualunque numero della serie naturale per lui stesso.

2.ª Si generano de' numeri quadrati formando una progressione geometrica qualunque $\dot{\dot{\,}}\!\!\!: a \,.\, a^2 \,.\, a^3 \,.\, a^4 \,.\, a^5 \,.\, a^6 \ldots\ldots a^{n-1}$. Il terzo termine a^2 è quadrato, il quinto a^4 parimenti, il settimo a^6 ancora, e così di seguito ogni termine di luogo dispari. Poichè si segni generalmente il luogo dispari per il numero dispari $2h+1$, e si sostituisca questo numero dispari invece di n nella espression generale dei termini a^{n-1}, ne verrà $a^{n-1} = a^{2h+1-1} = a^{2h}$, termine quadrato. Che se a sia egli stesso quadrato, tutti i termini della progressione, niuno eccettuato, saranno in infinito quadrati, perchè posto $a = b^2$ divien $a^{n-1} = b^{2(n-1)}$.

3.ª Generansi i numeri quadrati tutti con ordine, sommando continuamente la progressione aritmetica dei numeri dispari $\div 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\, 11 \ldots$, che per brevità segnerò (A). Di fatto $1+3=4=2^2$, $1+3+5=9=3^2$, $1+3+5+7=16=4^2 \ldots\ldots$ Ed in genere la somma è il quadrato del numero dei termini sommati. Del che si trae facilmente la ragione dalla ecumenica forma $(a+a+(n-1)d)\times\frac{n}{2}$ della somma della indeterminata progression aritmetica $\div\, a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d\ldots.\ a+(n-1)d$: poichè nel caso di $a=1$, $d=2$, come è nella progressione dei numeri dispari, quella ecumenica forma della somma diviene $=2n\times\frac{n}{2}=n^2$. Quindi agevolmente si può soddisfare a tre quesiti.

Quesito I. Dato un numero quadrato n^2 dire di quanti numeri dispari continui dall'unità sia composto. Si estragga da n^2 la radice quadrata n; questa dirà quanti dei numeri dispari da 1 continuando nella progressione (A) formino insieme raccolti n^2.

Quesito II. Trovar la somma di tutti i numeri dispari sino ad un dato $2h+1$ inclusivamente. Si divida $2h+1$ in due numeri differenti tra di loro dell'unità, cioè h, $h+1$: il quadrato $(h+1)^2$ è la somma cercata. A ciò comprendere riflettasi, che il termine generale, o sia l'espression generale di un termine qualunque della progressione (A) è $1+(n-1)2$. Facciasi pertanto $1+(n-1)2=2h+1$, e ne segue $n=h+1$, $n^2=(h+1)^2$. Ma n^2 è la somma di tutti i numeri dispari da 1 sino ad $1+(n-1)2$, o sia fino a $2h+1$ postogli uguale; dunque anche $(h+1)^2$.

Quesito III. Dato un numero quadrato n^2 trovar il massimo dei numeri dispari, che lo compongono. Sarà egli per la teoría della progressione (A) $1+(n-1)2=2n-1$. E per la soluzione del quesito antecedente essendo $n^2=(h-1)^2$, $n=h-1$, sarà esso massimo numero dispari cercato $h+h+1=2h+1=2n-1$.

PARTE II.

Problemi di semplice ugualità.

Frate Luca perturbatamente, giusta suo pravo costume, riporta i problemi di Leonardo, e con ragione gli rimprovera Tartaglia il disordine. A correggerlo, e rimettere i problemi dell'antico nostro padre nella conveniente disposizione, per la quale a dover lumeggiati ottengangli la meritata lode, io li divido in due classi; nella prima raccogliendo quelli di semplice ugualità, e riserbando quelli di doppia ugualità alla seconda. In ciascheduna classe poi ravvicinerò quelli, che più si rassomigliano, ed in ogni manipolo di simili il più semplice terrà il primo luogo, e seguirà il più composto. Aggiugnerò riflessi e indefinite soluzioni.

1.° Trovar due numeri quadrati, l'intervallo de' quali sia un dato numero dispari $2h+1$. Si osservi, che generalmente l'intervallo tra i quadrati $(n+1)^2$, n^2 cioè $n^2+2n+1-n^2$ è $=2n+1=n+1+n=$ alla somma delle due radici $n+1$, n. Dunque separando il dato numero dispari $2h+1$ in due parti $h+1$, h differenti dell'unità, la maggiore $h+1$ sarà la radice del maggiore dei due quadrati numeri richiesti, e la minore h la radice del minore.

Gioverà a suo tempo l'aver qui confrontato con questo problema di Leonardo la quistione XI del libro II di Diofanto, il quale senza ristrignersi al caso, che l'intervallo dato sia numero dispari, si propone indistintamente, ed in tutta l'ampiezza di ritrovare due quadrati nel dato intervallo i; e l'esempio anzi che tratta è di intervallo pari. Lo scioglimento del greco analista consiste in porre il lato del minore dei due quadrati cercati $=x$, il lato del maggiore $=x+m$: sarà conseguentemente $(x+m)^2-x^2=x^2+$

$2mx + m^2 - x^2 = 2mx + m^2 = i$; onde $x = \frac{i - m^2}{2m}$. Diofanto lascia libera la grandezza di m, sì però, che m^2 non superi i, nè l'uguagli, come aggiugne Bacheto, qualora sia i quadrato. Perciò lo scioglimento di Diofanto gode anche il vantaggio di essere indeterminato, e comprender tutti i varj possibili modi di soddisfare al problema, sia per numeri interi, sia per fratti. A metter vie più in chiaro la differenza: sia il dato intervallo $i = 65$; sarà per il metodo di Leonardo $2h + 1 = 65$, il lato del minor quadrato $h = \frac{65 - 1}{2} = 32$, il lato del maggiore $h + 1 = 33$. Per il metodo di Diofanto sarà il lato del quadrato minore $x = \frac{65 - m^2}{2m}$, donde, facendo $m = 1$, si avrà $x = \frac{65 - 1}{2} = 32$, come per il metodo di Leonardo; ma facendo $m = 5$ si avrà inoltre $x = \frac{65 - 25}{10} = 4$. E di vero non è meno $(4+5)^2 - 4^2 = 65$, che $(32 + 1)^2 - 32^2 = 65$.

2.° Trovar due numeri razionali, e interi, li quadrati de' quali insieme congiunti facciano numero quadrato. Si prendano ad arbitrio due numeri na^2, nb^2, purchè però sieno o entrambi pari, o entrambi dispari: li due cercati numeri saranno $\sqrt{na^2 \times nb^2} = nab$; $\frac{na^2 + nb^2}{2} - nb^2$, ovvero $na^2 - \frac{na^2 + nb^2}{2}$. Poichè si trova $\frac{na^2 + nb^2}{2} - nb^2$, ovver $na^2 - \frac{na^2 + nb^2}{2} = \frac{na^2 - nb^2}{2}$; ed $(nab)^2 + \left(\frac{na^2 - nb^2}{2}\right)^2 = n^2a^2b^2 + \frac{n^2a^4}{4} - \frac{n^2a^2b^2}{2} + \frac{n^2b^4}{4} = \frac{n^2a^4}{4} + \frac{n^2a^2b^2}{2} + \frac{n^2b^4}{4} = \left(\frac{na^2 + nb^2}{2}\right)^2$. E le frazioni svaniranno nell'ipotesi, che na^2, nb^2 sieno entrambi pari o dispari. La soluzione è fondata su la quinta del II di Euclide: $na^2 + nb^2$ è la quantità intera, na^2, nb^2 le parti disuguali, $\frac{na^2 + nb^2}{2}$ la metà, $\frac{na^2 - nb^2}{2} = \frac{na^2 + nb^2}{2} - nb^2 = na^2 - \frac{na^2 + nb^2}{2}$ l'intervallo tra la metà, e l'una, o l'altra delle parti disuguali.

Altra risoluzione. Nella progression dei numeri dispari (A) esposta nella terza generazione dei numeri quadrati si prenda un numero dispari quadrato, che rappresenterò indeterminatamente per $2h+3$; la somma della progressione sino al numero dispari immediatamente antecedente $2h+1$ sarà pure quadrata, ed $=(h+1)^2$ per il quesito 2.° sciolto dipendentemente da essa terza generazione; e quadrato sarà eziandío l'aggregato di questa somma, e del quadrato dispari ad arbitrio preso $2h+3$ per la natura della progressione (A), non essendo tal aggregato che la somma di essa progressione sino al numero $2h+3$. Esempio: sia il quadrato numero dispari preso ad arbitrio $2h+3$ il 9, il numero dispari immediatamente antecedente è 7, la somma della progressione (A) sino a 7 è 16 numero quadrato, l'aggregato $16+9=25$ numero quadrato $=5^2$ è la somma della medesima progressione sino a 9.

3.° Dividere il numero quadrato h^2, somma dei due quadrati f^2+g^2, in due altri numeri quadrati differenti. Si prenda la radice quadrata h di h^2; nelle espressioni generali nab, $\frac{na^2-nb^2}{2}$ della risoluzione prima dell'antecedente problema si faccia $n=h$; poi si dividano i numeri hab, $\frac{h(a^2-b^2)}{2}$ l'uno e l'altro per $\frac{a^2+b^2}{2}$: saranno $\frac{2hab}{a^2+b^2}$, $\frac{h(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$ le due radici dei nuovi numeri quadrati, che si desiderano. Di fatto $\left(\frac{2hab}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{h(a^2-b^2)}{a^2+b^2}\right)^2=h^2\times\frac{4a^2b^2+a^4-2a^2b^2+b^4}{a^4+2a^2b^2+b^4}=h^2$.

4.° Dividere il numero non quadrato p, ma composto dei due quadrati insieme giunti f^2+g^2 in altri due quadrati differenti. Si formi a piacere di due quadrati $(ab)^2$, $\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2$ il quadrato $\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2$. Si dispongano poi le due radici date f, g, e le prese ab, $\frac{a^2-b^2}{2}$, queste sotto quelle

$\begin{matrix} f \ldots\ldots g \\ ab \ldots \frac{a^2-b^2}{2} \end{matrix}$. Moltiplica in linea verticale, e prendi la differenza dei due prodotti $fab - \frac{g(a^2-b^2)}{2}$. Moltiplica in croce, e piglia dei prodotti la somma $\frac{f(a^2-b^2)}{2} + gab$. Dividendo e quella differenza e questa somma per $\frac{a^2+b^2}{2}$, saranno i quozienti $\frac{2fab-g(a^2+b^2)}{a^2+b^2}$, $\frac{f(a^2-b^2)+2gab}{a^2+b^2}$ le radici dei due desiderati quadrati. E di verità

$$\frac{4f^2a^2b^2-4fgab(a^2+b^2)+g^2(a^2-b^2)^2+f^2(a^2-b^2)^2+4fgab(a^2-b^2)+4g^2a^2b}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{(f^2+g^2)\left((a^2-b^2)^2+4a^2b^2\right)}{(a^2+b^2)^2}=f^2+g^2=p.$$

Se avvenisse, che l'operazione producesse radici uguali alle date, si cambj la disposizione o di queste, o di quelle prese a piacere, e si rinnovi l'operazione.

5.° Trovare un numero quadrato, a cui aggiunto un dato numero m, la somma sia quadrata. Prendi $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$; poichè sarà $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2+m=\left(\frac{m+1}{2}\right)^2$.

Questa però non è che una delle infinite risoluzioni possibili. Ad aver l'espressione di tutte, dinotato per x^2 il quadrato cercato, si ponga $x^2+m=(x+t)^2=x^2+2tx+t^2$: ne vien quinci $x=\frac{m-t^2}{2t}$ espressione indeterminata, di molti, anzi infiniti valori comprensiva, se non si escluda x negativo, rappresentando t un numero ad arbitrio.

6.° Trovar un numero quadrato, dal quale detratto un dato numero m, rimanga residuo quadrato. Prendi $\left(\frac{m+1}{2}\right)^2$, e sarà $\left(\frac{m+1}{2}\right)^2-m=\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$.

La risoluzione generale di questo, similmente che del problema antecedente si otterrà fatto $x^2-m=(x-t)^2=x^2-2tx+t^2$; onde $x=\frac{m+t^2}{2t}$ espressione del tutto indefinita, ed immensa, e sempre positiva, preso positivo t.

7.° Assegnar due quadrati, de' quali ricevendo l'uno, perdendo l'altro lo stesso numero, restino ambedue quadrati. È questo problema una combinazione dei due precedenti, e si scioglie combinando le soluzioni loro. Ma ecco lo scioglimento sotto altro aspetto. Prendasi un numero qualunque dispari $2n+1$, e si divida nelle due parti n, $n+1$, saranno n^2, $(n+1)^2$ li quadrati, il primo de' quali ricevendo, il secondo perdendo lo stesso numero, vale dire $2n+1$, ambedue resteranno quadrati.

8.° Ritrovar un qualunque dato numero dispari $2h+1$ di quadrati numeri interi, la somma de' quali sia pur numero intero quadrato. Dalla serie dei numeri quadrati interi $1.4.9.16.25.36.49\ldots$ lasciato il primo quadrato 1, prendi numero $2h$ di quadrati, la somma de' quali dicasi S; piglia di più il quadrato $\left(\frac{S-1}{2}\right)^2$: sarà questo pur esso quadrato intero, e la somma tutta $S+\left(\frac{S-1}{2}\right)^2=\left(\frac{S+1}{2}\right)^2$ quadrato parimenti intero. Si comprenderà di tutto ciò la ragione osservando, che nell'esposta serie dei numeri quadrati interi questi sono alternativamente dispari e pari; dunque, lasciato il primo 1 dispari, e tolto un numero pari $2h$ de' seguenti, la somma di essi S sarà necessariamente dispari; dunque $S-1$, $S+1$ numeri pari, e conseguentemente $\frac{S-1}{2}$, $\frac{S+1}{2}$ numeri interi. Esempio: sia $2h+1=39$, cioè cerchinsi 39 numeri interi quadrati, la somma de' quali sia altresì numero intero quadrato. La somma S di 38 quadrati continui dell'esposta serie, lasciato il primo 1, trovasi $=20539$; laonde $S+\left(\frac{S-1}{2}\right)^2=20539+\left(\frac{20539-1}{2}\right)^2=\left(\frac{S+1}{2}\right)=\left(\frac{20540}{2}\right)^2=10270^2$.

9.° Trovare tre, ed anche più quadrati interi, che continuamente raccolti 1^2+2^2, $1^2+2^2+3^2\ldots$ la raccolta sia perpetuamente quadrato intero. Si dinotino con ordine i cercati quadrati interi, 1.° t^2, 2.° u^2, 3.° x^2, 4.° y^2, 5.° z^2..... Si prenda il 1.° $t^2 = 2h + 1$, cioè numero quadrato dispari, qualunque poi sia ad arbitrio, e si prosegua come qui sotto vien mostrato:

$$t^2 = 2h + 1 \ldots u^2 = h^2 \ldots x^2 = \left(\tfrac{1}{2}h^2 + h\right)^2 \ldots y^2 = \left(\tfrac{1}{8}h^4 + \tfrac{1}{2}h^3 + h^2 + h\right)^2 \ldots$$

della qual serie questa è la generazione, che servirà a continuarla a piacere: $u^2 = \left(\frac{t^2 - 1}{2}\right)^2$; $x^2 = \left(\frac{t^2 + u^2 - 1}{2}\right)^2$; $y^2 = \left(\frac{t^2 + u^2 + x^2 - 1}{2}\right)^2$.... Ed il principio, su cui è fondata la regola, si è, che se da un numero quadrato dispari si tolga l'unità, ed il residuo si divida per 2, e poi si quadri, la somma del primitivo quadrato e del nuovo sarà un quadrato intero. Il si vede applicando l'operazione a $2h+1$ supposto quadrato dispari: sarà $\left(\frac{2h+1-1}{2}\right)^2 = h^2$, e $2h + 1 + h^2 = (h + 1)^2$. Ed è un corollario del problema 5.°. Esempio. Pigliando $2h + 1 = t^2 = 9$, sarà $u^2 = h^2 = 16$, $x^2 = \left(\frac{1}{2}h^2 + h\right)^2 = (8 + 4)^2 = 12^2 = 144$, $y^2 = \left(\frac{1}{8}h^4 + \frac{1}{2}h^3 + h^2 + h\right)^2 = (32 + 32 + 16 + 4)^2 = 84^2 = 7056$.... E si avrà $t^2 + u^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$; $t^2 + u^2 + x^2 = 9 + 16 + 144 = 169 = 13^2$; $t^2 + u^2 + x^2 + y^2 = 9 + 16 + 144 + 7056 = 7225 = 85^2$. E così di seguito.

PARTE III.

Problemi di doppia ugualità.

1.° Si vedrà in questa classe tentar Leonardo, e sciogliere, o direttamente, o indirettamente, per qualche caso, dei problemi, la risoluzione generale e diretta de' quali anche oggidì è ardua, anzi di taluno ai più fini analitici artifizj superiore. Io però tutti raccorrò i sussidj, che le sottili invenzioni di Eulero e di la Grange somministrano per estendere le dirette, e le indirette soluzioni, accompagnandoli di nuove osservazioni, e novelli teoremi aggiugnendo, per i quali la materia acquisterà luce, e il modo si appaleserà di recare la indiretta soluzione ad un'ampiezza indefinita.

1.° Trovar due numeri quadrati, la somma de' quali sia quadrato, ed anche aggiugnendo ad essa somma il dato numero m abbiasi quadrato. Primieramente trova un numero quadrato, che con m faccia somma quadrata, e sarà per il problema antecedente $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$. Poi trova due numeri quadrati, che giunti facciano $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$; lo che farai per la v del II di Euclide considerando $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$ come il quadrato della metà della quantità intera $m-1$. Si divida questa in due parti disuguali na^2, nb^2 dopo aver preso a piacere i due quadrati a^2, b^2, per lo che altro non rimarrà che determinar n per la semplice equazione $na^2+nb^2=m-1$, dalla quale prontamente si ha $n=\frac{m-1}{a^2+b^2}$; onde una delle disuguali parti $na^2=\frac{(m-1)a^2}{a^2+b^2}$, l'altra $nb^2=\frac{(m-1)b^2}{a^2+b^2}$; l'intervallo tra la metà $\frac{m-1}{2}$, e ciascheduna di esse $=\frac{(m-1)(a^2-b^2)}{2(a^2+b^2)}$. Conseguentemente per la v di Euclide $\frac{(m-1)a^2}{a^2+b^2}\times\frac{(m-1)b^2}{a^2+b^2}+\left(\frac{(m-1)(a^2-b^2)}{2(a^2+b^2)}\right)^2=\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$; e basta compiere il calcolo del primo membro per trovarlo effettivamente identico con il secondo. Ma il prodotto $\frac{(m-1)a^2}{a^2+b^2}\times\frac{(m-1)b^2}{a^2+b^2}$ è una cosa stessa che il quadrato $\left(\frac{(m-1)ab}{a^2+b^2}\right)^2$: dunque saranno $\frac{(m-1)ab}{a^2+b^2}$, $\frac{(m-1)(a^2-b^2)}{2(a^2+b^2)}$ le radici dei due desiderati quadrati. Sia per esempio il numero dato $m=6$, e si prenda $a^2=4$, $b^2=1$: sarà $\frac{(m-1)ab}{a^2+b^2}=\frac{5.2}{5}=2$, $\frac{(m-1)(a^2-b^2)}{2(a^2+b^2)}=\frac{5.3}{2.5}=\frac{3}{2}$. Ed in effetto $2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}=\left(\frac{5}{2}\right)^2$ conforme alla prima condizion del problema, e $2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6 = \frac{25}{4} + 6 = \frac{49}{4} = \left(\frac{7}{2}\right)^2$ giusta la condizion seconda.

2.° Assegnare un numero, che trattone a resti quadrato, e giuntogli b faccia quadrato. Trattasi qui di fare ad un tempo $x - a = z^2$, $x + b = y^2$. Trasportando dalla prima nella seconda equazione il valor di $x = z^2 + a$, ne viene $z^2 + a + b = y^2$. Per lo che riducesi il problema a ritrovar un quadrato z^2, al quale aggiugnendo $a + b$ provenga quadrato, ciò che si è insegnato a fare nel problema 5.° . Sostituendo pertanto $a + b$ ad m, sarà il quadrato cercato $z^2 = \left(\frac{a+b-1}{2}\right)^2$, per conseguenza $x = \left(\frac{a+b-1}{2}\right)^2 + a$, $x + b = \left(\frac{a+b-1}{2}\right)^2 + a + b = \left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2$; onde ne segue un' altra espressione di $x = \left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2 - b$: e di fatto $\left(\frac{a+b-1}{2}\right) + a = \left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2 - b$.

Trasferendo alla funzione $z^2 + a + b$ la risoluzione indeterminata del problema 5.° con fare $z^2 + a + b = (z + t)^2 = z^2 + 2tz + t^2$, si avrà $z = \frac{a+b-t^2}{2t}$, e per conseguenza $x = z^2 + a = \left(\frac{a+b-t^2}{2t}\right)^2 + a$, ovvero $x = \left(\frac{a+b+t^2}{2t}\right)^2 - b$.

3.° Ritrovar un numero, al quale o aggiungasi o tolgasi un dato numero n, ne venga quadrato. Dalla risoluzion determinata del problema antecedente, fatto $a = b = n$, se ne deriva $x = n^2 + \frac{1}{4}$; ma si può ugualmente prendere $\frac{1}{4} n^2 + 1$. E dalla risoluzione indeterminata di esso problema precedente si tira $x = \frac{n^2}{t^2} + \frac{t^2}{4}$, e si può pigliar del pari $\frac{n^2}{4t^2} + t^2$: poichè, siccome $\frac{n^2}{t^2} + \frac{t^2}{4} \pm n = \left(\frac{n}{t} \pm \frac{t}{2}\right)^2$; così $\frac{n^2}{4t^2} + t^2 \pm n = \left(\frac{n}{2t} \pm t\right)^2$.

4.° Ritrovar un numero a, cui aggiungendo n, e togliendo $n + 1$, nell'uno e nell'altro modo riesca quadrato. Basta nel problema 2.° fare $a = n + 1$, $b = n$, e ne seguirà determinatamente $x = n^2 + n + 1$; indeterminatamente $x = \left(\frac{2n+1-t^2}{2t}\right)^2 + n + 1$; ovvero $= \left(\frac{2n+1+t^2}{2t}\right)^2 - n$.

5.° Rinvenire le espressioni generali, e indeterminate di un numero quadrato, e di un altro numero tale, che a quel quadrato giunto, o tolto lo lasci quadrato. A comoda brevità di dire si denominino rispettivamente il numero quadrato, e l'altro numero *quadrato congruo*, e *numero congruente*. Prendansi ad arbitrio due numeri m, n, sarà

Il quadrato congruo $(m^2 + n^2)^2 = m^4 + 2\,m^2 n^2 + n^4$.

Il numero congruente $4\,m\,n\,(m^2 - n^2) = 4\,m^3 n - 4\,m\,n^3$.

Di fatto congruo + congruente $= m^4 + 4\,m^3\,n + 2\,m^2\,n^2 - 4\,m\,n^3 + n^4 = (m^2 + 2\,m\,n - n^2)^2$.

Congruo − congruente $= m^4 - 4\,m^3 n + 2\,m^2 n^2 + 4\,m\,n^3 + n^4 = (m^2 - 2\,m\,n - n^2)^2$.

La regola è tratta dalla proprietà del triangolo rettangolo numerico. Sia $x^2 = y^2 + z^2$ un triangolo rettangolo numerico qualunque: sarà $x^2 \pm 2\,y\,z = y^2 \pm 2\,y\,z + z^2 = (y \pm z)^2$. La equazione $x^2 = y^2 + z^2$ riceve forma spiegata, ed effettuamento nella $(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2) + (2\,m\,n)^2$: dunque $(m^2 + n^2)^2 \pm 4\,m\,n\,(m^2 - n^2) = (m^2 - n^2 \pm 2\,m\,m\,n)^2$ sarà del pari lo sviluppo, e l'adempimento espresso dell'equazione $x^2 \pm 2\,y\,z = (y \pm z)^2$.

A formare, e stendere ordinatamente la Tavola dei quadrati congrui, e de' numeri congruenti, che generar si possono dai numeri della natural serie, si piglj successivamente un numero, e poi un altro di essa serie, e si combini con tutti gl'inferiori. Ecco un pezzo di sì fatta Tavola, che ad esempio io ho calcolato:

TAVOLA
DI QUADRATI CONGRUI, E NUMERI CONGRUENTI
PER I NUMERI DELLA SERIE NATURALE
ORDINATAMENTE GENERATI.

Origine del Congruo		*Origine del Congruente*	
$(2^2+1^2)^2 =$	25	$4.2.1(2^2-1^2)=$	24
$(3^2+1^2)^2 =$	100	$4.3.1(3^2-1^2)=$	96
$(3^2+2^2)^2 =$	169	$4.3.2(3^2-2^2)=$	120
$(4^2+1^2)^2 =$	289	$4.4.1(4^2-1^2)=$	240
$(4^2+2^2)^2 =$	400	$4.4.2(4^2-2^2)=$	384
$(4^2+3^2)^2 =$	625	$4.4.3(4^2-3^2)=$	336
$(5^2+1^2)^2 =$	676	$4.5.1(5^2-1^2)=$	480
$(5^2+2^2)^2 =$	841	$4.5.2(5^2-2^2)=$	840
$(5^2+3^2)^2 =$	1156	$4.5.3(5^2-3^2)=$	960
$(5^2+4^2)^2 =$	1681	$4.5.4(5^2-4^2)=$	720
$(6^2+1^2)^2 =$	1369	$4.6.1(6^2-1^2)=$	840
$(6^2+2^2)^2 =$	1600	$4.6.2(6^2-2^2)=$	1536
$(6^2+3^2)^2 =$	2025	$4.6.3(6^2-3^2)=$	1944
$(6^2+4^2)^2 =$	2704	$4.6.4(6^2-4^2)=$	1920
$(6^2+5^2)^2 =$	3721	$4.6.5(6^2-5^2)=$	1320
$(7^2+1^2)^2 =$	2500	$4.7.1(7^2-1^2)=$	1344
$(7^2+2^2)^2 =$	2809	$4.7.2(7^2-2^2)=$	2520
$(7^2+3^2)^2 =$	3364	$4.7.3(7^2-3^2)=$	3360
$(7^2+4^2)^2 =$	4225	$4.7.4(7^2-4^2)=$	8696
$(7^2+5^2)^2 =$	5476	$4.7.5(7^2-5^2)=$	3360
$(7^2+6^2)^2 =$	7225	$4.7.6(7^2-6^2)=$	2184
$(8^2+1^2)^2 =$	4225	$4.8.1(8^2-1^2)=$	2016
$(8^2+2^2)^2 =$	4624	$4.8.2(8^2-2^2)=$	3840
$(8^2+3^2)^2 =$	5329	$4.8.3(8^2-3^2)=$	5280
$(8^2+4^2)^2 =$	6400	$4.8.4(8^2-4^2)=$	6144
$(8^2+5^2)^2 =$	7921	$4.8.5(8^2-5^2)=$	6240
$(8^2+6^2)^2 =$	10000	$4.8.6(8^2-6^2)=$	5376
$(8^2+7^2)^2 =$	12769	$4.8.7(8^2-7^2)=$	3360
$(9^2+1^2)^2 =$	6724	$4.9.1(9^2-1^2)=$	2880

Considerando l'esposta Tavola, si vede primieramente, che uno stesso quadrato congruo può avere più origini, ed a norma della diversità delle origini congruenti diversi. Così, ad esempio, il numero quadrato congruo 4225 ha le due diverse origini $(7^2+4^2)^2$, $(8^2+1^2)^2$; e i due congruenti diversi 3696, 2016. Non è difficile il penetrar la causa, ed in genere la condizione fissare di questo avvenimento. Accaderà ciò ogni qualvolta m^2+n^2 formin un numero in altre maniere divisibile in due quadrati, quali f^2+g^2, h^2+k^2 ..... La somma di fatto 7^2+4^2 forma 65, che è pur divisibile in 8^2+1. Reciprocamente il numero congruente medesimo corrisponde a quadrati congrui diversi: il congruente, per esempio, 3360 corrisponde ai tre quadrati congrui 3364, 5476, 12769. Ciò avviene, perchè nell'espressione generale dei numeri congruenti $4mn(m^2-n^2)$ si può avere lo stesso prodotto $mn(m^2-n^2)$ variando i fattori m, n, m^2-n^2, purchè si varj l'uno in ragion inversa del prodotto degli altri due. Per terzo la Tavola ordinata nelle origini non riesce ordinata nel progressivo crescere dei numeri congrui, che sino all'origine $(5^2+4^2)^2$, cioè sino al terminarsi le combinazioni del numero 5 con i suoi inferiori: indi in poi la serie si abbassa all'incominciarsi le combinazioni di ogni nuovo maggior numero co' suoi inferiori, e risale sino all'esaurirsi di esse. Nella successione dei numeri congruenti non apparisce legge di sorta alcuna.

Ma la Tavola comprende ella tutti i quadrati congrui, e tutti i congruenti numeri possibili? No certamente; anzi n'è ben lungi. Serva a prova il numero $225=15^2$, che ha per congruente 216: poichè $225+216=441=21^2$, e $225-216=9=3^2$; eppure non è compreso nella Tavola, nè può per combinazione di due interi numeri m, n tolti dalla natural serie generarsi, perchè 15 non è divisibile in due quadrati m^2+n^2 di due numeri m, n interi. Non è però che 225, o sia 15^2 non entri nella espression generale di quadrati congrui $(m^2+n^2)^2$; vi è inchiuso benissimo, ma purchè m, n sieno irrazionali. Di fatto sia $m=\sqrt{13\frac{1}{2}}$, $n=\sqrt{1\frac{1}{2}}$; sarà $(m^2+n^2)=15^2=225$, e $4mn(m^2-n^2)=4\sqrt{13\frac{1}{2}}\sqrt{1\frac{1}{2}}.12=4\sqrt{20\frac{1}{4}}.12=4.4.\frac{1}{2}.12=18.12=216$. Stando anche dunque nella sfera dei quadrati congrui interi, e lor numeri congruenti, è mestieri distinguere quelli, che da interi numeri razionali generazione ricevono, e quelli, che da quantità irrazionali generar si possono. Fecondissima, e varia al sommo, infinitamente più che la prima, è questa seconda generazione. A prova io mi accingo a dimostrare il seguente ampissimo teorema.

Teorema I. Non vi ha numero quadrato, che non si possa intender compreso nella espressione de' quadrati congrui $(m^2+n^2)^2$, ed al quale assegnar non si possa il suo congruente numero razionale, se a generatrici si prendano quantità m, n irrazionali; e la generazione è infinitamente varia. Sia H^2 un numero quadrato qualunque: bisogna scegliere per m, n due quantità irrazionali di forma, e valor tale, che provenga $m^2+n^2=H$, e che $4mn(m^2-n^2)$ riesca pur razionale. Si prenda $m=\sqrt{(\frac{1}{2}H+D)}$, $n=\sqrt{(\frac{1}{2}H-D)}$: ne verrà $m^2+n^2=H$; $m^2-n^2=2D$; $mn=\sqrt{(\frac{1}{4}H^2-D^2)}$. Non resta dunque, che dare a D una forma razional tale, che $\frac{1}{4}H^2-D^2$ risulti quadrato, e conseguentemente $\sqrt{(\frac{1}{4}H^2-D^2)}$ razionale. Or per l'artifizio dall'Eulero insegnato al num. 51 della sua indeterminata Analisi, ciò ottiensi facendo $D=\frac{H(p^2-q^2)}{2(p^2+q^2)}$, dove essendo p, q due quantità indeterminate, è parimenti D una quantità indeterminata capace d'infiniti valori a piacere. Sarà pertanto $\sqrt{\left(\frac{1}{4}H^2 - D^2\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}H^2 - \frac{H^2(p^2-q^2)^2}{4(p^2+q^2)^2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}H^2\left(1 - \frac{(p^2-q^2)^2}{(p^2+q^2)^2}\right)} = \frac{Hpq}{p^2+q^2}$. E perciò

Essendo H^2 un quadrato qualunque, si recherà esso nella classe de' quadrati congrui espressi generalmente per $(m^2+n^2)^2$, se non valendo a generarlo due numeri razionali m, n si prendano a generatrici le due quantità irrazionali $m = \sqrt{\left(\frac{1}{2}H + \frac{H(p^2-q^2)}{2(p^2+q^2)}\right)} \ldots n = \sqrt{\left(\frac{1}{2}H - \frac{H(p^2-q^2)}{2(p^2+q^2)}\right)}$, quantità infinitamente variabili, essendo ad arbitrio variabili i numeri p, q; per lo che la generazione riesce indefinitamente moltiplice, immensamente feconda. E sarà il numero congruente di lui $= \frac{4H^2pq(p^2-q^2)}{(p^2+q^2)^2}$ razionale, ad onta d'essere le quantità generatrici irrazionali; ed esso pure infinitamente vario: la qual varietà dichiarerò più splendidamente con quest'altro teorema.

Teorema II. Ogni numero quadrato ha tanti congruenti, quanti sono in universo i possibili quadrati congrui, e numeri congruenti. Se ben si rifletta, la espressione $\frac{4pq(p^2-q^2)}{(p^2+q^2)^2}$ non è che una frazione formata della general espressione de' numeri congruenti divisa per la general espressione de' quadrati congrui. Dunque qualunque numero congruente diviso per il rispettivo quadrato congruo, e moltiplicato per H^2, diviene numero congruente di H^2. Di fatto $H^2 \pm \frac{4H^2pq(p^2-q^2)}{(p^2+q^2)^2} = H^2\left(1 \pm \frac{4pq(p^2-q^2)}{(p^2+q^2)^2}\right) = H^2\left(\frac{(p^2+q^2)^2 \pm 4pq(p^2-q^2)}{(p^2+q^2)^2}\right)$. Non ogni cangiamento però di p, q, o sia non ogni congruente diviso per il suo congruo produce un nuovo congruente per H^2. Sia $H^2 = 15^2 = 225$. Si prenda $p = 2$,

$q = 1$ sarà $m = \sqrt{\left(\frac{15}{2} + \frac{15 \cdot 3}{2 \cdot 5}\right)} = \sqrt{\left(\frac{15}{2} + \frac{9}{2}\right)} = \sqrt{12} \ldots n = \sqrt{\left(\frac{15}{2} - \frac{9}{2}\right)} = \sqrt{3} \ldots (m^2 + n^2)^2 = (12 + 3)^2 = 15^2$. Il numero congruente sarà $\frac{15^2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (2^2 - 1^2)}{(2^2 + 1^2)^2}$, cioè il quadrato 15^2 moltiplicato con il primo congruente della Tavola pag. 126 diviso per il suo congruo: onde si ha $\frac{15^2 \cdot 24}{25} = \frac{25 \cdot 9 \cdot 24}{25} = 226$. Si cangi il valore di p, e si faccia $= 3$, lasciando $q = 1$, e ne verrà $m = \sqrt{\left(\frac{15}{2} + \frac{15 \cdot 8}{2 \cdot 10}\right)} = \sqrt{13\frac{1}{2}} \ldots n = \sqrt{1\frac{1}{2}}$. E per numero congruente $\frac{15^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 (3^2 - 1^2)}{(3^2 + 1^2)^2}$, che è il prodotto di 15^2 con il terzo congruente della Tavola per il suo congruo diviso, cioè $\frac{15^2 \cdot 96}{100} = \frac{25 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 24}{25 \cdot 4} = 9 \cdot 24 = 226$, come prima.

Da ciò si apprende esservi molti congruenti, che per i loro congrui divisi danno il quoziente medesimo.

Non ogni congruente per il suo congruo diviso darà quoziente intero; anzi dalle più delle divisioni risulterà quoziente fratto: dunque ogni quadrato H^2 avrà de' congruenti interi, e de' fratti, e questi saranno i più.

6.° Trovar un numero quadrato, a cui aggiunta, o tolta la radice di lui presa, un numero di volte k resti quadrato. Si moltiplichi per k l'espression generale del quadrato congruo $(m^2 + n^2)^2$, ed il prodotto si divida per l'espression generale del numero congruente $4mn(m^2 - n^2)$, il quoziente $\frac{k(m^2+n^2)^2}{4mn(m^2-n^2)}$ sarà la radice del quadrato desiderato: essendo $\left(\frac{k(m^2+n^2)^2}{4mn(m^2-n^2)}\right)^2 \pm k \times \frac{k(m^2+n^2)^2}{4mn(m^2-n^2)} = \frac{k^2(m^2+n^2)^2}{(4mn(m^2-n^2))^2} \times ((m^2+n^2)^2 \pm 4mn(m^2-n^2))$, che è un prodotto quadrato, essendo evidentemente quadrato il primo fattore, ed anche il secondo, siccome aggregato o differenza del quadrato congruo, e del numero congruente in genere.

7.° Assegnar un numero quadrato, al quale o si aggiunga o si detragga un dato numero h, venga quadrato. Nella Tavola dei quadrati congrui, e numeri congruenti si cerchi se vi sia congruente alcuno, che diviso per il dato numero h dia numero quadrato. Vi sia, e chiamisi c, e diviso per h doni il quadrato g^2. Sia C il congruo corrispondente al congruente c; sarà $\frac{C}{g^2}$ il quadrato numero cercato. Poichè essendo $\frac{c}{h} = g^2$, sarà $h = \frac{c}{g^2}$; e perciò $\frac{C}{g^2} \pm h = \frac{C}{g^2} \pm \frac{c}{g^2} = \frac{C \pm c}{g^2}$, che sarà sicuramente quadrato, essendolo $C \pm c$. Se per esempio $h = 6$, trovasi adatto al caso il congruente 24, che diviso per 6 dà 4 numero quadrato. Il congruo del 24 è 25: quinci il quadrato desiderato verrà ad essere $\frac{25}{4} = 6\frac{1}{4} = \left(2\frac{1}{2}\right)^2$. In effetto $6\frac{1}{4} + 6 = 12\frac{1}{4} = \left(3\frac{1}{2}\right)^2$; e $6\frac{1}{4} - 6 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Non si parla del caso, che h si trovasse egli stesso tra i congruenti della Tavola; poichè la cosa sarebbe da sè in un attimo spedita.

L'esposto metodo però, oltre ad essere indiretto, era eziandio presso Leonardo e gli altri che tennergli dietro tanto limitato, quanto limitata era presso di loro la Tavola dei numeri congrui, e congruenti, ristretta a quelli soli, che generazione ricevono dai numeri razionali interi. È avvertita questa imperfezione da Fra Luca. E fu dessa, che costrinse Leonardo, e gli analisti italiani succedutigli per lo spazio di quasi tre secoli andar tentone in quei casi, che al metodo si sottraevano: con che però rinvenirono delle ingegnose regole particolari, da essi dette *straordinarie*. Trascelgo la regola per il 7, per il problema cioè di trovar un numero quadrato, al quale aggiunto o detratto il 7, provenga ed aggregato, e residuo quadrato. Ecco in compendio la regola. Sarà

$\frac{((7+2)^2+(2\cdot7+2)^2)^2}{4(7+2)(2\cdot7+2)(3\cdot7+4)}$ il quadrato desiderato. Ed in vero

$$\frac{((7+2)^2+(2\cdot7+2)^2)^2}{4(7+2)(2\cdot7+2)(3\cdot7+4)} \pm 7 = \frac{(9^2+16^2)^2}{4\cdot9\cdot16\cdot25} = \frac{113569}{14400} \pm 7 =$$

$\frac{113569 \pm 100800}{14400}$: nella qual frazione essendo manifestamente quadrato il denominatore $=120^2$, non rimane a dimostrarsi, fuorchè esserlo pure in ambedue i casi, del segno $+$, e del segno $-$ il numeratore. E così è, essendo $113569+100800=214369=463^2$; e $113569-100800=12769=113^2$. Dunque la regola è giustissima. Or cerchiam noi, se ad altri numeri, e quali, trasportar si possa. Sostituita al numero 7 la spezie indeterminata h, avremo

$$\frac{((h+2)^2+(2h+2)^2)^2}{4(h+2)(2h+2)(3h+4)} \pm h = \frac{(5h^2+12h+8)^2}{4(6h^3+26h^2+36h+16)} \pm h =$$

$$\frac{25h^4+120h^3+224h^2+192h+64 \pm (24h^4+104h^3+144h^2+64h)}{4(6h^3+26h^2+36h+16)}$$

Preso nel numeratore il segno $+$ ne viene per aggregato $49h^4+224h^3+368h^2+256h+64=(7h^2+16h+8)^2$.

E preso il segno $-$ ne risulta per residuo

$$h^4+16h^3+80h^2+128h+64=(h^2+8h+8)^2.$$

Dunque il numeratore proviene in ambedue i casi quadrato, qualunque numero sia h, e per ragione di esso numeratore la regola non soffre limite. Ma bisogna in oltre considerare il denominatore; poichè le tre quantità

$$\frac{(5h^2+12h+8)^2}{4(6h^3+26h^2+36h+16)};\ \frac{(7h^2+16h+8)^2}{4(6h^3+26h^2+36h+16)};\ \frac{(h^2+8h+8)^2}{4(6h^3+26h^2+36h+16)}$$

non saranno quadrati, se non sia quadrato il denominatore.

Dunque la regola varrà per tutti i numeri h idonei a rendere $6h^3+26h^2+36h+16$ quadrato, e non varrà per gli altri. Riducesi perciò la ricerca ad investigare i numeri razionali, che possono rendere $6h^3+26h^2+36h+16$ quadrato. Poniamo $6h^3+26h^2+36h+4^2=(th^2+uh+4)^2=t^2h^4+2tuh^3+(u^2+8t)h^2+8uh+4^2$: ne segue $t^2h^3+(2tu-6)h^2+(u^2+8t-26)h+8u-36=0$. Se facciasi $t=0$, $8u-36=0$, che dà $u=\frac{36}{8}=4\frac{1}{2}$, resta $-6h^2+((4\frac{1}{2})^2-26)h=0$; onde $h=\frac{(4\frac{1}{2})^2-26}{6}=\frac{-23}{24}$. Che se farassi $8u-36=0$; $u^2+8t-26=0$, donde $t=\frac{26-(4\frac{1}{2})^2}{8}$; rimanendo $t^2h+2tu-6=0$, ne proverrà $h=\frac{6-2tu}{t^2}=\frac{-480}{529}$. Queste due sono le sole combinazioni di supposti atte ad abbassare al primo grado la equazione di indeterminato supposto elevata al grado terzo, per quinci ottener razionale il valore di h, e sono nel compendio di una sola equazione i due artifizj dall'Eulero insegnati nel capo VIII della sua analisi indeterminata. Maraviglia si è, che nè l'uno nè l'altro artifizio, nè l'una nè l'altra combinazion di supposti dia $h=7$, che pur si sa esser il valor di h, che ha prestato origine alla funzione $6h^3+26h^2+36h+16$, prodotto di $h+2$, $2h+2$, $3h+4$, e che, rendendo quadrato ciascheduno a parte di questi fattori, rende nella maniera più semplice quadrato il prodotto loro, o sia l'esposta funzione. Ecco dunque un difetto ben degno di considerazione di que' due artifizj. Nè applicar si può alla funzione medesima l'altro metodo, per cui Eulero suggerisce di sciogliere la funzion data ne' suoi fattori, ogni volta che sia possibile, supponendo esso metodo due fattori uguali, che la nostra non ha. Del rimanente quei due artifizj non tornano affatto inutili al nostro scopo, porgendoci i due valori di $h=\frac{-23}{24}$, e di $h=\frac{-480}{529}$. E che questi veracemente soddisfacciano rendendo la funzione $6h^3+26h^2+36h+16$, o sia il prodotto $(h+2)(2h+2)(3h+4)$ un quadrato, basti farne esperimento sul primo. Sarà pertanto $-\frac{23}{24}+2=\frac{25}{24}$; $-\frac{46}{24}+2=\frac{2}{24}$; $\frac{-69}{24}+4=\frac{27}{24}$; onde il prodotto $=\frac{25\,.\,2\,.\,27}{24^3}=\frac{25\,.\,2\,.\,3^3}{8^3\,.\,3^3}=\frac{5^2}{8^2\,.\,4}$, frazione quadrata. Il quadrato congruo di $h=\frac{-23}{24}$ sarà $\frac{\left((h+2)^2+(2h+2)^2\right)^2}{4(h+2)(2h+2)(3h+4)}=\frac{\left((\frac{25}{24})^2+(\frac{2}{24})^2\right)^2}{4\times\frac{5^2}{8^2\,.\,4}}=\frac{(25^2+2^2)^2}{5^2\,.\,8^2\,.\,3^4}=\frac{395641}{5^2\,.\,8^2\,.\,3^4}$: laonde $\frac{395641}{5^2\,.\,8^2\,.\,3^4}\mp\frac{23}{24}=\frac{395641\mp 23\,.\,8\,.\,3^3\,.\,5^2}{5^2\,.\,8^2\,.\,3^4}=\frac{395641\mp 124200}{5^2\,.\,8^2\,.\,3^4}$: vale dire, preso il superior segno, $=\frac{519841}{5^2\,.\,8^2\,.\,3^4}=\frac{721^2}{5^2\,.\,8^2\,.\,3^4}$; e preso il segno inferiore, $=\frac{271441}{5^2\,.\,8^2\,.\,3^4}=\frac{521^2}{5^2\,.\,8^2\,.\,3^4}$: così che provenendo nell'uno e nell'altro modo quadrato, trovasi adempiuto ciò che si desiderava. Insegna poi l'Eulero, come sapendosi un valore acconcio a render quadrato una funzione, per esso comunemente trovar se ne possano altri con progresso indefinito. Noi sappiamo tre valori di h idonei a far quadrato la funzione $6h^3+26h^2+36h+16$, i quali sono $h=7$, $h=\frac{-23}{24}$, $h=\frac{-480}{529}$. Rappresentiamoli tutti e tre per la lettera f, e dinotiamo per $f+h$ il nuovo valore di h. Sostituendo, giusta la dottrina di Eulero, $f+h$ in luogo di h nella funzione $6h^3+26h^2+36h+16$, si avrà

$$6h^3+(18f+26)h^2+(18f^2+52f+36)h+6f^3+26f^2+36f+16$$

per nuova funzione da rendersi quadrato, l'ultimo termine di essa essendo il quadrato, in cui si convertì la funzion primaria per il valore $h=f$. Qualunque valore di h, che segnerò f', il quale renderà quadrato la nuova funzione, somministrerà un nuovo valore $f+f'$, capace a render quadrato la funzione primaria. E sostituendo $f+f'$ in luogo di f nella nuova funzione, diverrà essa una seconda nuova funzione, conducendo la quale a quadrato, si otterranno per i valori di h a ciò idonei, i quali si rappresentin per f'', dei novelli valori $f+f'+f''$ conducenti similmente a quadrato la funzion primaria, e così indefinitamente.

Se Leonardo Pisano non diede del problema di trovare un quadrato, a cui giunto, o tolto un numero dato, resti quadrato, una soluzion diretta e generale, non è però da imputargli colpa, e fargliene biasimo; chè anzi merita lode, ed ammirazione nel primo analista italiano uno scioglimento anche indiretto e parziale di un problema, qual è codesto, di un problema cioè, che nè Diofanto, nè Bacheto, nè Fermat, nè tampoco Eulero, e la Grange osarono affrontare, e che resiste indocile, indomito a tutti gli artifizj di indeterminata analisi dalla perspicacia loro escogitati. È egli un problema di doppia ugualità, trattandosi di fare ad un tempo con il medesimo razionale valore di x quadrato sì x^2+h, sì x^2-h; lo che esprimeremo secondo il solito così: $x^2+h=y^2$; $x^2-h=z^2$. Il secondo degli artifizj di Diofanto per le doppie ugualità qui non vale; poichè si avrebbe $2h=y^2-z^2$, e considerando $2h$ come un prodotto di $2r$ in $\frac{h}{r}$, ne verrebbe $(y+z)(y-z)=2r\times\frac{h}{r}$, e quinci $y=r+\frac{h}{2r}$, $z=r-\frac{h}{2r}$; conseguentemente $x^2+h=\left(r+\frac{h}{2r}\right)^2$, $x^2-h=\left(r-\frac{h}{2r}\right)^2$: due equazioni, nel secondo membro delle quali non contenendosi x, non può venir distrutto il quadrato x^2 esistente nel primo, e creato in vece un termine in x semplice, che cangi le equazioni dal secondo al primo grado, nel che l'artifizio consiste, traendosi così necessariamente razionale il valore di x. Vero è bensì, che le due trovate equazioni di secondo grado producono sciolte uno stesso valore di x, ma irrazionale, qual è

$x = \sqrt{\left(r^2 + \frac{h^2}{4r^2}\right)}$: laonde l'artifizio di Diofanto in questo nostro caso, in luogo di finir la quistione, la porta a quella di render quadrato la funzion $r^2 + \frac{h^2}{4r^2}$, o sia $\frac{4r^4 + h^2}{4r^2}$, il che si riduce poi finalmente a render quadrato la funzione di quarto grado $4r^4 + h^2$. Ma ella è appunto questa una di quelle formole, che l'Eulero nel capo IX della sua analisi indeterminata num. 138 pronuncia *qu'on ne peut en aucune maniere espérer de resoudre, avant que d'avoir, pour ainsi dire, trouvé une solution*. Vale dire, che trovato per felice sorte, od a tentone un valore di r, che renda quadrato la funzione $4r^4 + h^2$, si può sperare per mezzo di esso, nel modo sopra da me spiegato, di ricavarne degli altri; ma non si può con alcun artifizio sperare di determinare il valor primo. Prendiamo un'altra via da quella di Diofanto diversa: adempiamo a dirittura l'ugualità $x^2 + h = y^2$, cerchiam cioè di botto il valore x idoneo a render quadrato la funzione $x^2 + h$, il che faremo ponendo $x^2 + h = (x+r)^2 = x^2 + 2rx + r^2$; onde $x = \frac{h - r^2}{2r}$. Trasportando questo valore di x nell'altra ugualità $x^2 - h = z^2$, avremo $\frac{h^2 - 6hr^2 + r^4}{4r^2} = z^2$: per la qual cosa rimane di render quadrato la funzione $h^2 - 6hr^2 + r^4$. Ma questa ancora per sentenza di Eulero nel luogo citato ricusa di piegarsi, ed arrendersi alle industrie degli analisti. Mettiamci dietro il la Grange nelle sue addizioni all'analisi indeterminata di Eulero. Nel paragrafo V num. 57 dimostra egli, che se f sia un valor particolare di x, il quale renda la funzione $a + bx + cx^2$ un quadrato g^2, e si prenda μ per un numero indeterminato, sarà $x = \frac{f\mu^2 - 2g\mu + b + cf}{\mu^2 - c}$ la espressione racchiudente tutti i valori, che dar si possano ad x, a fine che la funzione proposta divenga un quadrato. Poichè essendo per supposto

$a+bf+cf^2=g^2$, sarà $a=g^2-bf-cf^2$, e sostituendo questo valore di a in $a+bx+cx^2$, questa funzione prenderà l'aspetto $g^2+b(x-f)+c(x^2-f^2)$; e supponendo indeterminatamente $\left(g+\mu(x-f)\right)^2$, il quadrato, a cui essa funzion può recarsi, dall'equazione $g^2+b(x-f)+c(x^2-f^2)=\left(g+\mu(x-f)\right)^2$, eliso il termine g^2, ne proviene $x=\frac{f\mu^2-2g\mu+b+cf}{\mu^2-c}$. Dopo ciò nel paragrafo VI, trattando delle doppie e triple ugualità, proposte al num. 62 le due ugualità $a+bx+cx^2+y^2$; $\alpha+\beta x+\gamma x^2=z^2$, con trasferire nella seconda la espressione indeterminata testè esposta dei valori idonei a render quadrato la prima, cangia essa seconda in

$$\alpha(\mu^2-c^2)^2+\beta(\mu^2-c)(f\mu^2-2g\mu+b+cf)+\gamma(f\mu^2-2g\mu+b+cf)^2=z^2$$

così che il problema dipende dal trovare un valore razionale di μ, che adempia questa ugualità, rendendo quadrato la funzione nel primo membro espressa. Confessa l'esimio analista, che *on n'a jusqu'à présent aucune regle générale pour resoudre ces sortes d'égalités; et tout ce qu'on peut faire, c'est de trouver successivement différentes solutions, lorsqu'on en connoît une seule*. Pure essendo nelle nostre ugualità $x^2+h=y^2$, $x^2-h=z^2$ le due funzioni molto più semplici che le generali dal la Grange trattate, per essere $a=-\alpha$, $b=\beta=0$, $c=\gamma=1$, vediamo se per sorte ne nascesse quinci un qualche particolare vantaggio, per cui riuscisse di ottenere in particolare ciò, di che non si ha general regola. Attesi i notati valori de' coefficienti a, b, c, α, β, γ, si avrà

$$-h(\mu^2-1)^2+(f\mu^2-2g\mu+f)^2=z^2.$$

Ed effettuando le elevazioni qui indicate, ed ordinando

$$(f^2-h)\mu^4-4fg\mu^3+(4g^2+2f^2+2h)\mu^2-4fg\mu+f^2-h=z^2.$$

Si è supposto f un valor determinato di x, che renda x^2+h un quadrato g^2: per il problema v tra quelli di semplice ugualità di Leonardo un valor f di x rendente x^2+h quadrato è $\frac{h-1}{2}$, e ne viene $\left(\frac{h-1}{2}\right)^2+h=\left(\frac{h+1}{2}\right)^2=g^2$; dunque sostituendo tal valore di f, e tal di g ci si offerirà

$$\left(\left(\frac{h-1}{2}\right)^2-h\right)\mu^4-4\left(\frac{h-1}{2}\right)\left(\frac{h+1}{2}\right)\mu^3+\left(4\left(\frac{h+1}{2}\right)^2+2\left(\frac{h-1}{2}\right)^2+2h\right)\mu^2-$$
$$4\left(\frac{h-1}{2}\right)\left(\frac{h+1}{2}\right)\mu+\left(\frac{h-1}{2}\right)^2-h=z^2.$$

Per brevità segnerò (F) la funzione di quarto grado, che sta a primo membro di questa ugualità, e che si debbe render quadrato. Or per gl' insegnamenti di Eulero al al capo IX una funzione di quarto grado $e\mu^4+d\mu^3+c\mu^2+b\mu+a$ non è che in tre casi riducibile a quadrato, quando cioè sia il coefficiente e un quadrato ε^2; o sia l'ultimo termine a un quadrato α^2; o quando sieno congiuntamente e, a quadrati. Nella nostra funzione (F) essendo $e=a$ non può avvenire il primo, o secondo caso, che non avvenga tutt'insieme il terzo. Ma avanti di procedere deesi riflettere, che il suppor ciò, vale dire $\left(\frac{h-1}{2}\right)^2-h$ quadrato, è lo stesso che supporre il problema per un valore già sciolto; poichè essendosi, con prender $x=\frac{h-1}{2}$ adempiuta la prima ugualità $x^2+h=y^2=\left(\frac{h+1}{2}\right)$, se ancora $\left(\frac{h-1}{2}\right)^2-h$ sia quadrato, si sarà adempiuta eziandío la seconda ugualità $x^2-h=z^2$, e si avrà per $x=\frac{h-1}{2}$ una soluzion del problema. Ma il fatto sta, che $\left(\frac{h-1}{2}\right)^2-h=\frac{h^2-6h+1}{4}$ non può esser quadrato che per certe grandezze di h, come per $h=6$, non in generale. Dunque quand'anche con l'euleriano artifizio riuscisse di determinar nel caso $\left(\frac{h-1}{2}\right)^2-h$

quadrato il valore razionale di μ rendente quadrato la funzione (F), tutta l'utilità si limiterebbe a trovare in certi particolari casi altre soluzioni del problema, suppostane già una. Ma veggiamo se nel caso almeno di $\left(\frac{h-1}{2}\right)^2 - h$ riesca la determinazione di μ. Ponendo in generale $\varepsilon^2 x^4 + d x^3 + c x^2 + b x + \alpha^2 = (\varepsilon \mu^2 + l \mu + \alpha)^2 = \varepsilon^2 \mu^4 + 2 \varepsilon l \mu^3 + (l^2 + 2 \varepsilon \alpha) \mu^2 + 2 \alpha l \mu + \alpha^2$, ne viene $(d - 2 l \varepsilon) \mu^2 + (c - l^2 - 2 \varepsilon \alpha) \mu + b - 2 l \alpha = 0$; dalla quale equazione in due maniere si può in genere trarre il valore di μ, e con fare $d - 2 l \varepsilon = 0$, e con fare $b - 2 l \alpha = 0$. Ma nel caso nostro avvertasi essere non solo $\varepsilon = \alpha$, ma parimenti $b = d$; onde $d - 2 l \varepsilon = b - 2 l \alpha$, ed il porre l'una delle quantità $= 0$ importa il porvi anche l'altra, con che non rimane che $(c - l^2 - 2 \varepsilon \alpha) \mu = 0$, che dando $\mu = 0$ non arreca alcun giovamento, e rende vano tutto il calcolo. È questa una combinazione, che ad Eulero non accadde di osservare, e che sfugge all'industria del metodo. Volgiamoci ad altra considerazione, o sia a contemplare il problema sotto altro aspetto. È ella per quarto bellissima proprietà del triangolo rettangolo espresso in genere per $x^2 = y^2 + z^2$, che sia $x^2 \mp 2 y z$ quadrato, essendo $= y^2 \mp 2 y z + z^2 = (y \mp z)^2$; e da questa elegantissima proprietà appunto è dedotta, come ho già fatto vedere, la dottrina dei numeri congrui, e congruenti. Il prodotto $2 y z$ rappresenta il quadruplo dell'aja del triangolo rettangolo $= \frac{1}{2} y z$. Paragonando pertanto alla funzione $x^2 \mp 2 y z$, la funzione $x^2 \mp h$, con intendere $2 y z = h$, il problema di trovare un numero quadrato x^2, a cui aggiunto, o tolto il dato numero h, resti quadrato, sarà uno stesso che il problema: data per valore dell'aja $\frac{1}{2} y z$ la quantità $\frac{1}{4} h$, tra i triangoli rettangoli, a' quali può esser comune, trovar quello che abbia, o quelli che abbiano l'ipotenusa x razionale. Or $x=\sqrt{(y^2-z^2)}$, e per l'equazione $2yz=h$, dalla quale $z=\frac{h}{2y}$, $x=\sqrt{\left(y^2+\frac{h^2}{4y^2}\right)}=\sqrt{\frac{4y^4+h^2}{4y^2}}$; dunque il problema così trasmutato richiede di render quadrato la funzione $4y^4+h^2$, e fa perciò ricadere nella stessa stessissima insuperabile difficoltà, a cui condusse dapprima l'artifizio diofanteo. Vi ha una quinta via semplice, spedita, immediata, ma che per la somma semplicità sua appunto ho voluto all'ultimo luogo riservare, perchè veduto innanzi il fine, a cui mettono le squisite, non si credesse della troppa semplicità effetto quello, al quale subito batte la spontanea. Si moltiplichino pertanto l'una con l'altra le duè ugualità $x^2+h=y^2$, $x^2-h=z^2$, e si avrà tosto $x^4-h^2=y^2z^2=(yz)^2$. Per lo che la soluzion del problema esige di render quadrato la funzione x^4-h^2, che è della classe di quelle, alle quali menarono le vie prima e quarta, e non altrimenti che esse elude gli artifizj sino ad ora inventati dai sommi ingegni, che loro forze intesero a promuovere l'analisi indeterminata.

Venendo meno l'arte in tentar la soluzione diretta e generale del problema di doppia ugualità $x^2\pm h=$ a quadrato, non rimane che impiegarla ad estendere la soluzione indiretta, e qualunque estendimento è da aversi in pregio.

Estendimento I. Gli antichi non si avvisarono alla doppia ugualità $x^2\pm h=$ a quadrato soddisfar ugualmente un valor di $x=f$, ed il contrario $x=-f$. Oggidì non vi ha chi ciò possa ignorare.

Estendimento II. Tenga luogo di secondo estendimento quello per me dato all'antica regola, essendo il dato numero $h=7$.

Estendimento III. L'ugualità $x^2+h=$ a quadrato si adempie sempre per $x=\frac{h-1}{2}$; rimarrà sciolto per intero il problema tutte volte che sia insieme $\left(\frac{h-1}{2}\right)^2 - h = \frac{h^2-6h+1}{4} =$ a quadrato, siccome lo è nel caso $h=6$. A determinare tutti i casi simili si ponga $h^2-6h+1=(rh-t)^2=r^2h^2-2rth+t^2$; onde $(r^2-1)h^2-(2rt-6)h+t^2-1=0$; la qual equazione dà luogo a due determinazioni di h. 1.ª ponendo $r^2-1=0$ si trae $h=\frac{t^2-1}{2t-6}$; 2.ª fatto $t^2-1=0$, deducesi $h=\frac{2r-6}{r^2-1}$. Possiamo adoperare la medesima lettera, e ridurre le due espressioni di h ad $h=\frac{r^2-1}{2r-6}$; $h=\frac{2r-6}{r^2-1}$. Si prenda per esempio $r=2$, ne viene $h=\frac{-3}{2}$; $h=\frac{-2}{3}$. Dal primo valor di h ne segue $x=\frac{-\frac{3}{2}-1}{2}=\frac{-5}{2.2}$; $x^2+h=\left(\frac{-5}{2.2}\right)^2-\frac{3}{2}=\frac{25-3.4.2}{2^2.2^2}=\frac{25-24}{2^2.2^2}=\left(\frac{1}{2.2}\right)^2$; $x^2-h=\frac{25+24}{2^2.2^2}=\left(\frac{7}{2.2}\right)^2$. Il secondo valor di h produce $x=\frac{-\frac{2}{3}-1}{2}=\frac{-5}{2.3}$; $x^2+h=\left(\frac{-5}{2.3}\right)^2-\frac{2}{3}=\frac{25-2.4.3}{2^2.3^2}=\frac{25-24}{2^2.3^2}=\left(\frac{1}{2.3}\right)^2$; $x^2-h=\left(\frac{7}{2.3}\right)^2$. Facciasi $r=4$, sarà $h=\frac{15}{2}$, $h=\frac{2}{15}$. Per il primo valore $x=\frac{13}{2.2}$; $x^2+h=\left(\frac{13}{2.2}\right)^2+\frac{15}{2}=\frac{169+120}{2^2.2^2}=\left(\frac{17}{2.2}\right)^2$; $x^2-h=\frac{169-120}{2^2.2^2}=\left(\frac{7}{2.2}\right)^2$. Per il secondo valor di h si ha $x=\frac{-13}{2.15}$; $x^2+h=\left(\frac{-13}{2.15}\right)^2+\frac{2}{15}=\left(\frac{17}{2.15}\right)^2$; $x^2-h=\left(\frac{7}{2.15}\right)^2$. Si può anche prendere r numero rotto; e prendendolo tale, i valori di h saranno sempre positivi, essendo negativi del pari r^2-1, $2r-6$. Potendosi dunque, con dare ad r infiniti valori a piacere, determinare infiniti valori di h, stendendo di questi la tavola, si avrebbero infinite particolari soluzioni indirette del problema $x^2 \pm h =$ a quadrato. Siccome poi adempie sempre l'ugualità $x^2+h=$ a quadrato il valor $x=\frac{h-1}{2}$; così reciprocamente adempie in genere la uguaglità x^2-h il valor $x = \frac{h+1}{2}$ risultando $\left(\frac{h+1}{2}\right)^2 - h = \left(\frac{h-1}{2}\right)^2$. Con trasportare $\frac{h+1}{2}$ in luogo di x nella prima ugualità $x^2 + h =$ a quadrato ne nasce $\frac{h^2+6h+1}{4} =$ a quadrato; laonde a rendere interamente sciolto il problema conviene, che sia $h^2 + 6h + 1 =$ a quadrato. Ponendo $h^2 + 6h + 1 = (rh + t)^2$ si ricavano, operando come sopra, le due espressioni $h = \frac{r^2-1}{6-2r}$; $h = \frac{6-2r}{r^2-1}$, le quali non differiscono dalle superiori che nell' avere $6 - 2r$ in vece di $2r - 6$; il che importa, che per qualunque assunto valor di r prenderanno gli stessi valori, che le superiori, con la sola differenza dal positivo al negativo. La ragione è, che $\left(\frac{h-1}{2}\right)^2 + h$, cangiando h in $-h$, cangiasi in $\left(\frac{-h-1}{2}\right)^2 - h = \left(\frac{h+1}{2}\right)^2 - h$, e viceversa $\left(\frac{h-1}{2}\right)^2 + h$ in $\left(\frac{-h-1}{2}\right) + h = \left(\frac{h+1}{2}\right) + h$. Congiungendo adunque i ritrovati, si soddisfarà per $x = \frac{h-1}{2}$ al problema $x^2 \pm h =$ quadrato, tutte le volte, che h sia della infinita tavola, che si può formare per le espressioni $\frac{r^2-1}{2r-6}$, $\frac{2r-6}{r^2-1}$, tanto se h venga dato con il segno, con il quale proverrebbe da queste espressioni, e con il quale nella tavola si trovereb-be, quanto se dato venga con segno contrario: lo che raddoppia il numero dei casi di tale indiretta soluzione. Questo però è universale per qualunque dato numero h, non differendo punto il problema $x^2 \mp h =$ a quadrato dal problema $x^2 \pm h =$ a quadrato; così che sempre la soluzione per il numero dato h vale per il caso che si desse il numero $-h$.

Estendimento IV. Se dall'infinita moltitudine di numeri congruenti, che, giusta il secondo mio teorema, compete a qualunque numero quadrato intero, o rotto, si suppongano trascelti per ogni numero quadrato intero solamente tutti i rispettivi congruenti interi soli, e formata un'ordinata tavola; dico, che tale tavola servirà essa a sciogliere il problema $x^2 \mp h =$ a quadrato, sempre che sia il dato h intero, quantunque non ammetta per suo quadrato congruo numero quadrato intero, ma sol numero quadrato rotto. Poichè sia questo numero quadrato rotto $\frac{A^2}{B^2}$: essendo $\frac{A^4}{B^4} \mp h =$ a quadrato, sarà per conseguenza anche $\frac{A^4 \mp B^4 h}{B^4} =$ a quadrato, e perciò altresì $A^4 \mp B^4 h$ da sè solo $=$ a quadrato. Esisterà dunque nella immaginata tavola di tutti i numeri quadrati interi con tutti i rispettivi congruenti interi possibili il numero quadrato intero A^2, numeratore della cercata frazion quadrata $\frac{A^2}{B^2}$, al quale corrisponderà per congruente l'intero numero $B^4 h$, prodotto del denominatore B^4 di essa quadrata frazione con il dato numero h. Laonde cercato tra i congruenti della ampissima tavola uno, che diviso per h dia un quoziente quadrato B^4, di questo quadrato, e del quadrato congruo posto rimpetto a $B^4 h$ si formerà la desiderata frazione $\frac{A^2}{B^2}$.

Estendimento V. Il problema di doppia ugualità $x^2 \mp h =$ a quadrato riducesi di un colpo, come sopra in quinto luogo ho dimostrato, al problema di semplice ugualità $x^4 - h^2 =$ a quadrato. Qualunque valor f di x, che soddisfi a questo problema, soddisfa a quello, e reciprocamente. Si supponga in qualunque modo o per le tavole, o per particolari regole, od a tentone, scoperto un valore f, che adempia l'uno e l'altro problema: se per mezzo di esso valor f riesca di trovare altri valori, che verifichino $x^4 - h^2 =$ a quadrato, questi tutti saranno altrettanti scioglimenti della doppia ugualità $x^2 \mp h =$ a quadrato. Ma così è, che saputosi un valor f di x effettuante $x^4 - h^2 =$ a quadrato, se ne possono rinvenire successivamente altri con il metodo altra volta già adoperato. Sia per il valor f la funzion $x^4-h^4=f^4-h^4=g^2$, e pongasi il nuovo valor di $x=f+y$. Sostituendo in $x^4-h^4=$ a quadrato, si avrà $y^4+4fy^3+6f^2y^2+4f^3y+g^2=$ a quadrato. Suppongasi indeterminatamente $=(y^2+ly+g)^2=y^4+2ly^3+(l^2+2g)y^2+2lgy+g^2$. Scancellati i termini elidentisi ne viene $(4f-2l)y^3+(6f^2-l^2-2g)y+4f^3-2lg=0$. Dalla quale equazione, secondo che si faccia $4f-2l=0$, ovvero $4f^3-2lg=0$, si ottengono due determinazioni di y: 1.ª $y=-2f$ .... 2.ª $y=\frac{3f^2g^2-2f^6-g^3}{2fg(f^2-g)}$. E quindi due nuovi valori di $x=f+y$: 1.° $x=-f$ .... 2.° $x=\frac{g^2-2f^4}{2fg}$. Il primo valore non ci arreca alcun vantaggio; poichè già per ciò, che nell' estendimento 1.° si è da me notato, sapevasi, che sciogliendo il problema f scioglievalo ugualmente $-f$. Rispetto al secondo valore, essendo $g^2=f^4-h^4$, si riduce esso ad $x=-\frac{f^4+h^4}{2f\sqrt{(f^4-h^4)}}$; che quantunque si presenti con segno negativo, si può del pari prender positivo. Ed è un espressione, che siccome serve dal primo valore soddisfacente al problema al secondo, così serve dal secondo al terzo, e così via via, intendendo sempre per f l'ultimo soddisfacente valor trovato, e per x il nuovo. Illustriamo la cosa con un esempio. Sia $h=24$, che è il primo numero congruente della tavola sopra esposta, il quadrato congruo soddisfacente al problema $x^2\pm 24=$ a quadrato è per la tavola stessa 25: di fatto $25+24=49=7^2$, $25-24=1=1^2$. Dunque $f=5$, e quinci $x=-\frac{5^4+24^2}{2.5\sqrt{(5^4-24^2)}}=\frac{1201}{70}$, che debbe essere un nuovo valore soddisfacente al problema, e lo è in effetto, essendo $\left(\frac{1201}{70}\right)^2+24=\frac{1442401+24\cdot 4900}{70^2}=\frac{1442401+117600}{70^2}=\frac{1560001}{70^2}=\left(\frac{1249}{70}\right)^2$; ed $\left(\frac{1201}{70}\right)^2-24=$

$\frac{1442401 - 117600}{70^2} = \frac{1324801}{70^2} = \left(\frac{1151}{70}\right)^2$. Nella stessa maniera supponendo $f = \frac{1201}{70}$ si troverà il terzo soddisfacente valore di x, ec.

8.° Dato un numero H, assegnarne un altro, che ad esso giunto, o tolto, faccia somma, e residuo quadrato. Se il dato numero H sia quadrato, il problema in sostanza vorrà dire: dato il quadrato congruo, trovare il numero congruente, sarà cioè il problema inverso del superiore, e si scioglierà indirettamente, supposta la vasta tavola nell' Estendimento IV divisata, cercando in essa il dato quadrato, al quale starà rimpetto il numero congruente, o la schiera dei numeri congruenti di esso. Che se pur fosse il quadrato dato H un quadrato rotto $= \frac{A^2}{B^2}$, non verrebbe meno il benefizio della tavola, ma servirebbe istessamente a trovarne il numero congruente, con prendere nella colonna de' quadrati congrui il quadrato A^2, e trascegliere fra i congruenti di lui quello divisibile per B^2; imperocchè il quoziente sarebbe un congruente del dato quadrato fratto $\frac{A^2}{B^2}$. Ma a prendere il problema in generale, dicasi x il cercato numero. Si debbono ad un tempo verificare le due equazioni $H + x = t^2$, $H - x = u^2$. Da questa seconda traendo il valor $x = H - u^2$, e trasportandolo nella prima, ne nasce $2H - u^2 = t^2$, e quinci $2H = u^2 + t^2$. Questa risultante equazione ci dimostra esser facil cosa sciogliere, e ben direttamente, il problema, quantunque volte sia $2H$ un numero divisibile in due quadrati interi. Per esempio sia $H = 5$, $2H = 10 = 1 + 9$: prendendo $u^2 = 1$, $t^2 = 9$, si ha dall'equazione $x = H - u^2$, sostituiti i numeri, $x = 5 - 1 = 4$, il qual valore adempie appunto eziandío l'altra ugualità $H + x = t^2$, cioè $5 + 4 = 9$. E poichè per il problema 4.° di quelli di semplice ugualità, dato un numero in due quadrati diviso si può il medesimo in molte altre, in infinite paja diverse di quadrati dividere, infinite perciò soluzioni del problema dar si potranno. Così, fatto $f=1$, $g=3$, $a=1$, $b=2$, le radici dei due nuovi quadrati, ne' quali anderà diviso il numero 10, saranno $\frac{2.3.2-1.3}{4+1}=\frac{9}{5}$, $\frac{3.3+2.2}{4+1}=\frac{13}{5}$: in effetto $\left(\frac{9}{5}\right)^2+\left(\frac{13}{5}\right)^2=\frac{81}{25}+\frac{169}{25}=\frac{250}{25}=10$; e posto $u=\frac{9}{5}$, ne viene $x=H-u^2=5-\frac{81}{25}=1\,\frac{19}{25}$, $H+x=5+1\,\frac{19}{25}=6\,\frac{19}{25}=\frac{169}{25}=\left(\frac{13}{5}\right)^2$. Frate Luca nel trattar questo problema getta delle idee così confuse, così imperfette, così disunite, che grande è l'oscurità che si genera, ed all'intelletto interponsi. Io mi lusingo di aver indovinato la mente di Leonardo Pisano, e di averla co' miei teoremi per l'una parte, con l'uso degli anteriori problemi di lui per l'altra, il più possibile estesa.

Vi ha un altro particolar caso, nel quale conceduto viene di recare per retta e spedita via il problema a scioglimento; quando cioè sia $2H$ quadrato; il che avverrà se sia $H=2^{2n-1}$, e più generalmente $=2^{2n-1}m^2$; poichè sarà $2H=2^{2n}m^2$. Pongasi $2^{2n}m^2-u^2=t^2=(2^n m-ru)^2$: se ne trarrà $u=\frac{2^{n+1}m.r}{1+r^2}$, e quinci $x=2^{2n-1}m^2-\left(\frac{2^{n+1}m.r}{1+r^2}\right)^2$.

Vediamo se riescaci di conseguire una più ampia soluzione diretta del problema, ad uso traendo l'ingegnoso artifizio, e la sottil teoría, onde il celebratissimo la Grange in una Memoria primieramente su lo scioglimento dei problemi indeterminati di secondo grado inserita tra gli Atti dell'Accademia di Berlino per l'anno 1767, e poscia nel paragrafo V delle sue addizioni all'algebra indeterminata di

Eulero assume di svolgere i casi di possibilità, ed in essi generalmente adempiere lo scioglimento dell'equazione $A Y^2 + B = Z^2$, alla quale si riduce l'universalissima indeterminata equazione di secondo grado $\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon x y + \phi y^2 = 0$, trasformandosi questa in $(\gamma + \varepsilon x)^2 - 4\phi(\alpha + \beta x + \delta x^2) = (2\phi y + \varepsilon x + \gamma)^2$, cioè, facendo $\gamma^2 - 4\alpha\phi = a$, $2\gamma\varepsilon - 4\beta\phi = b$, $\varepsilon^2 - 4\delta\phi = c$, $2\phi y + \varepsilon x + \gamma = Y$, in $a + bx + cx^2 = Y^2$; e convertendosi questa in $4cY^2 + b^2 - 4ac = (2cx + b)^2$, la quale, fatto $4c = A$, $b^2 - 4ac = B$, $2cx + b = Z$, prende l'aspetto $A Y^2 + B = Z^2$. Or si ponga $Y = \frac{p}{q}$, intendendo per p, q due numeri tra loro primi; sarà $A . \frac{q^2}{p^2} + B = Z^2$; e perciò $A p^2 + B q^2 = q^2 Z^2$, e fatto $q^2 Z^2 = z^2$, $A p^2 + B q^2 = z^2$; e sarà allo scioglimento di questa equazione, o sia al ritrovamento di due numeri interi, e fra lor primi p, q tali, che la funzione $A p^2 + B q^2$ divenga quadrato, che si ridurrà qualunque problema indeterminato di secondo grado. Se A, ovvero B, sia numero quadrato, la equazione non abbisogna di nuovo artifizio, bastando gli antichi di Diofanto; e parimenti se quadrato sia la somma $A + B$, ciò che sfuggì l'avvertenza del la Grange. Se in qualche caso il problema presentasse l'equazione $A e^2 P^2 + B f^2 q^2 = R^2$, dividendo per f^2 si avrebbe $A . \frac{e^2 P^2}{f^2} + B q^2 = \frac{R^2}{f^2}$, la qual equazione, fatto $\frac{e^2 P^2}{f^2} = p^2$, $\frac{R^2}{f^2} = z^2$, si cangerebbe in $A p^2 + B q^2 = z^2$, quanto più semplice atteso il discacciamento dei quadrati e^2, f^2 dai coefficienti, altrettanto più facile a trattarsi. Intendasi dunque sempre per $A p^2 + B q^2 = z^2$ l'equazion del problema ridotta alla massima semplicità con discacciare dai coefficienti i quadrati, che contenessero. Del qual discacciamento però converrà risovvenirsi in fine del calcolo per compensarlo, con dedurre dal valore, che si sarà ritrovato di p, quello di $P = \frac{fp}{e}$. Denoti anche sempre A dei due coefficienti dati, o dei rimanenti dopo lo discacciamento dei fattori quadrati, quello, che ha numero maggiore, ancorchè sia affetto di negativo segno, e B quello che ha numero minore, con qualunque segno o negativo o positivo, nulla contando nel confronto il segno. Combinando la condizione dell'esposta semplicità di A e B, e la fondamental condizione di essere p, q numeri tra loro primi, si fa chiaro in primo luogo dover pure di necessità ciascheduno di loro esser primo rispetto z; altrimenti se per esempio p, z contenessero un fattor comune essendo $p = rg$, $z = vg$, ne seguirebbe $g^2(v^2 - Ar^2) = Bq^2$; e siccome il primo, così il secondo membro Bq^2 dell'equazione dovrebbe contener g^2, e non potendolo contenere per l'assegnata semplicità B, dovrebbe contenerlo q^2; laonde q avrebbe con p comune il fattor g contro la fondamentale ipotesi. Similmente si ragioni rispetto q, z. Veniamo in secondo luogo a comprendere esser mestieri, che p provenga primo a B, e q primo ad A. Poichè sia $p = rk$, $B = Fk$, ne avremo $Ar^2k^2 + Fkq^2 = z^2$; e non potendo q^2, per ragione di esser primo con p, contener k, il primo membro dell'equazione avrà un fattor k non quadrato, con che ripugna, che sia esso membro quadrato, contro ciò, che si desidera. Lo stesso accaderà se fingasi q non primo ad A. Con queste condizioni e conseguenze definita, e spiegata la natura della equazione $Ap^2 + Bq^2 = z^2$, pianta l'autore la base della indagine dei casi di possibilità a risolverla in questo teorema. L'equazione $Ap^2 = z^2 - Bq^2$ non può sussistere, se A non sia un divisore di un numero di questa forma $n^2 - B$, n essendo un numero intero. Si moltiplichi l'equazione per

$z'^2 - Bq'^2$: si avrà $Ap^2(z'^2 - Bq'^2) = (z^2 - Bq^2)(z'^2 - Bq'^2) = z^2z'^2 + B^2q^2q'^2 - B(z^2q'^2 + z'^2q^2) = z^2z'^2 + B^2q^2q'^2 \pm 2Bzz'qq' - B(z^2q'^2 + z'^2q^2) \mp 2Bzz'qq' = (zz' \pm Bqq')^2 - B(zq' \pm z'q)^2$. Or egli è in nostra podestà rendere $zq' - z'q = \pm 1$; lo che dimostra, e insegna il prestantissimo analista a fare con la teoria delle frazioni continue, ma comprendesi anche chiaramente, sol che riflettasi, che dividendo per qq' proviene $\frac{z}{q} - \frac{z'}{q'} = \frac{\pm 1}{qq'}$, e che questa equazion effettuasi tosto, prendendo l'arbitraria frazione $\frac{z'}{q'} = \frac{z}{q} \mp \frac{1}{qq'}$. Che se inoltre facciasi $zz' - Bqq' = n$, si avrà $Ap^2(z'^2 - Bq'^2) = n^2 - B$, o sia $p^2(z'^2 - Bq'^2) = \frac{n^2 - B}{A}$; la qual equazione, essendo il primo membro di numeri interi tutto composto, e perciò intero, non può sussistere se anche il secondo non sia intero, cioè se $n^2 - B$ non sia per A divisibile. Su questo teorema appoggia il la Grange una serie di supposti e di equazioni, che dalla equazione $Ap^2 + Bq^2 = z^2$ distingue, appellando questa *principale*, codeste *secondarie*, e delle quali mano mano esamina gli accidenti, dopo aver renduto dei supposti, dai quali nascon, ragione. Io raccorrò sotto uno sguardo in ordinato prospetto continuo i supposti, e le equazioni, onde possa la mente con prontezza maggiore, e d'un sol colpo comprendere l'artifizio.

Equazione principale. $Ap^2 + Bq^2 = z^2$.

Supposti 1.ⁱ .... n .... $\leqq \frac{1}{2}A$ .... $A' = \frac{n^2 - B}{A}$ .... $z = nq - Aq'$.

Secondaria Equaz. **1.ª** $p^2 = A'q^2 - 2nqq' + Aq'^2$.

Supposti 2.ⁱ ...... $n' = n - \nu A' \leqq \frac{1}{2}A'$ ... $A'' = \frac{n'^2 - B}{A'}$ .... $q = \nu q' + q''$.

Secondaria Equaz. 2.ª $p^2 = A''q'^2 - 2n'q'q'' + A'q''^2$.

Supposti 3.ⁱ ...... $n'' = n' - \nu A'' \leqq \frac{1}{2}A''$ ... $A''' = \frac{n''^2 - B}{A''}$ .... $q' = \nu q'' + q'''$.

Secondaria Equaz. 3.ª $\quad p^2 = A''' q''^2 - 2 n'' q'' q''' + A'' q'''^2$.

Supposti 4.ⁱ $\ldots n''' = n'' - \nu'' A''' \underline{\leq} \frac{1}{2} A''' \ldots A'''' = \frac{n'''^2 - B}{A'''} \ldots q'' = \nu'' q''' + q''''$.

Secondaria Equaz. 4.ª $\quad p^2 = A'''' q'''^2 - 2 n''' q''' q'''' + A''' q''''^2$.

. . . .

Si proseguirà questa serie quanto sarà bisogno, e si rinnoverà secondo le regole, che io vo ad esporre intorno al modo di discernere i casi di possibilità, e di eseguire lo scioglimento della principal equazione.

Regola I. Si attribuiscano ad n tutti i valori de' numeri interi da 1 sino ad $\frac{1}{2} A$, considerando in A il solo numero, non atteso il segno, se sia negativo. Se niuno di tali valori rende $\frac{n^2 - B}{A}$, o sia il quoziente A' numero intero, si pronunzi a dirittura essere impossibile l'adempiere l'equazione $A p^2 + B q^2 = z^2$. È superfluo dare ad n valori $>$ di $\frac{1}{2} A$, e tentare se per alcun di essi riuscir possa $\frac{n^2 - B}{A}$ numero intero. Poichè sieno $a, b, c \ldots\ldots < \frac{1}{2} A$, od $\frac{1}{2} A$ i valori di n idonei a produr quoziente A' intero; non vi ha dubbio, che idonei a ciò pur saranno i valori $\mu A \pm a$, $\mu A \pm b$, $\mu A \pm c \ldots$ perchè numero intero resultando $\frac{n^2 - B}{A}$, resulterà del pari numero intero $\frac{(\mu A \pm a)^2 - B}{A} = \frac{a^2 - B}{A} \pm 2 \mu a + \mu^2 A$; e viceversa idoneo essendo all'intento $n = \mu A \pm a$, non può non esser idoneo il semplice $n = a$. Ma d'altra parte il sostituire $\mu A \pm a$ in luogo di n nella funzione $(n^2 - B) q^2 - 2 n A q q' + A^2 q'^2$, o sia $(n q - A q')^2 - B q^2$, egli torna lo stesso, che il mettervi il semplice $\pm a$, e togliere da q' la quantità μq, essendo $\mu A q \pm a q - A q' = \pm a q - A(q' - \mu q)$: dunque, poichè q' è un numero indeterminato, nel quale si può intender anche compreso $q' - \mu q$, perciò si fa palese non potersi per la sostituzione di $\mu A \mp a$ produrre nulla di più, che per la sostituzione del semplice valor a; per conseguenza essa sostituzione è superflua, ed istessamente ogni altra simile. Trasferiscasi ad n', n'', n'''...... ciò che detto si è per n; e se dati loro i valori da 1 sino ad $\frac{1}{2} A'$, da 1 sino ad $\frac{1}{2} A''$...... avvenga di alcuno, che non esibisca verun dei rispettivi quozienti A'', A'''...., intero, si abbandoni tosto l'operazione, giudicando lo scioglimento della principal equazione impossibile.

Regola II. Se all'incontro alcuno dei numeri interi da 1 sino ad $\frac{1}{2} A$ renda $\frac{n^2-B}{A}$, o sia A' non solo intero, ma insieme quadrato, lo scioglimento è in pronto; poichè contenendo in tal caso la prima delle secondarie equazioni il termine $A'q^2$ quadrato, si effettuerà essa all'istante con far $q'=0$; dal che ne verrà $p=q\sqrt{A'}$; e quinci $Ap^2+Bq^2= AA'q^2+Bq^2=q^2(AA'+B)=q^2(n^2-B+B)=q^2n^2$ quadrato, come si desiderava. E rimanendo q ad arbitrio, è chiaro in $p=q\sqrt{A'}$ aversi una espressione indefinita di p, ed in q^2n^2 una innumerevole copia di verificamenti dell' equazione proposta. Che se al modo di Diofanto pongasi $A'q^2-2nqq'+Aq'^2=(q\sqrt{A'}-r)^2$, ne verrà $q=\frac{r^2-Aq'^2}{2r\sqrt{A'}-2nq'}$, espressione doppiamente indeterminata, siccome due indeterminati numeri inchiudente; li quali però ad un solo ridur si possono con porre $r=q'$, con che l'espressione al primo grado si abbassa, divenendo $q=\frac{(A-1)r}{2(n-\sqrt{A'})}$. Si conseguirà del pari l'intento, se in vece di A' riesca quadrato un altro dei successivi quozienti A'', A'''.... risolvendo la relativa equazione, e rimontando per le antecedenti ad aver ....q'', q', q.

Regola III. Si avverta, che essendo $B<A$, ed n tutt' al più $=\frac{1}{2}A$, dèe per conseguenza essere $\frac{n^2-B}{A}$, cioè $A'<A$,

perchè tutto al più sarà $A' = \frac{\frac{1}{4}A^2 - B}{A} = \frac{1}{4}A - \frac{B}{A} < A$. La cosa è evidente per il caso di B positivo; ma è anche facile a dimostrarsi nel caso di B negativo. Poichè sia $B = -b$; sarà, attesa la condizione di $A > B$, certamente $\frac{1}{4}A + \frac{b}{A} < \frac{1}{4}A + \frac{A}{A} < \frac{1}{4}A + 1$, per conseguenza $< A$, fuorchè nel caso di $1 > \frac{3}{4}A$; il che non può essere, se non avendo A, che debbe essere intero, il minimo degl'interi valori possibili, cioè 1. Ma ciò essendo, A sarebbe quadrato, ed il caso uscirebbe fuori della sfera di quelli contemplati nell' artifizio, lasciandosi immediatamente sciogliere dal metodo di Diofanto. Dunque dei casi, che all'artifizio, che si va spiegando, appartengono, generalmente, e senza eccezione veruna, sia B positivo, o sia negativo, si può stabilire, che preso $n \leqq \frac{1}{2}A$, sarà $\frac{n^2 - B}{A} = A' < A$. Per simil maniera ragionando s'inferirà dover universalmente essere $A'' < A'$, $A''' < A''$..... dover cioè i quozienti A', A'', A'''..... formare una progressione continuo-decrescente. Laonde, se nè A', nè A'', nè A'''..... si trovi quadrato; con il continuo decrescere di essi quozienti si otterrà almeno di giugnere ad uno, il quale, non considerato il segno, sia $< B$. Sia ad esempio tale A''''. Moltiplicando per A'''' l'equazione quarta delle secondarie, si avrà $A''''p^2 = A''''^2 q'''^2 - 2n''' A'''' q''' q'''' + A''' A'''' q''''^2 = (A'''' q''' - n''' q'''')^2 - B q''''^2$. Venendone quinci $A''''p^2 + B q''''^2 = (A'''' q''' - n q'''')^2$, sarà mestieri che $A''''p^2 + Bq''''^2$ si renda quadrato, ed all'adempimento di ciò sarà ridotto il problema. La funzione $A''''p^2 + B q''''^2$ rovesciata, con scrivere $B q''''^2 + A''''p^2$, è simile alla dapprima proposta $Ap^2 + Bq^2$, sì che per render essa quadrato debbesi ripigliar da capo l'artifizio cangiando il B in un nuovo A, l'A'''' in nuovo B, il q'''' in nuovo p, ed il p in nuovo q. Ma si ha il vantaggio, che il nuovo A, il nuovo B sono rispettivamente più semplici che i primieri. In proporzione il saranno i nuovi quozienti A', A'', A'''..... i quali non altrimenti che i primi anderanno successivamente decrescendo. E nel formarli o se ne incontrerà uno per tutti i valori del rispettivo n, n', n''..... riuscente rotto, e sarà dimostrata la impossibilità del problema; o se ne presenterà uno quadrato, e si avrà in mano la soluzione, o si perverrà ad uno $<$ del nuovo B, cioè, nell'ipotesi ad esempio presa, dell'A'''' di primo ordine, e si ritornerà per la seconda volta da capo dell'artifizio. Ciò che si è prescritto di fare giungendo ad un quoziente $< B$, si farà in arrivare ad un quoziente che contenga un quadrato moltiplicato con altro fattore $< B$: poichè discacciato il quadrato rimarrà a quoziente esso fattore $< B$; dunque si rovescierà, non altrimenti che nel primo successo, la funzione, e si riprenderà istessamente il giro dell'artifizio. La cosa non può andare all'infinito, ma necessariamente o si caderà in un quoziente per ogni sostituzion rotto, se il problema è impossibile, od in un quoziente quadrato, che sarà, se non altro, 1, se è possibile.

Regola IV. Se sia $B = -1$ essendo impossibile un quoziente intero < 1, si avrà il vantaggio, che l'operare terminerà nella prima applicazione dell'artifizio, e nel corso di essa, o si avrà l'avviso della insolubilità del problema in un quoziente universalmente fratto o l'offerta della soluzione da un quoziente quadrato, che sarà, andando all'estremo, l'1. Ed oltre al modo di compiere indefinitamente la soluzione esposto sotto la Regola II., si potrà adoprar questo. Supposto, ad esempio, che il quoziente quadrato sia l'A''', moltiplicata l'equazione secondaria terza per A''', provenendone $A''' p^2 = A'''^2 q''^2 - 2 n'' A''' q'' q''' + A'' A''' q'''^2 = (A''' q'' - n'' q''')^2 + q'''^2$

per cagione di $A''A'''=n''^2+1$, si avrà, facendo $A'''p^2=s^2$, $(A'''q''-n''q''')^2=v^2$ l'equazione $s^2=v^2+q^2$, equazion del triangolo rettangolo, alla quale si sa indefinitamente soddisfare prendendo $s=a^2+b^2$, $v=a^2-b^2$, $q=2ab$. Studiato mi sono di ristrignere, e collocare insieme mercè di un perspicuo ordine nel più chiaro giorno l'artifizio, e la teoría dell'esimio la Grange.

Venendo ora a farne l'applicazione al problema di Leonardo, la cui equazione è, come ho dimostrato, $2H-u^2=t^2$, se pongasi $u=\frac{1}{Y}=\frac{q}{p}$, $pt=z$, ne verrà $2Hp^2-q^2=z^2$: per la qual cosa vede ognuno esser noi qui nel caso spedito di $B=-1$; ed il primo esame da istituirsi per discerner, se il problema sia o no possibile a sciogliersi, essere di dare ad n tutti i numeri interi da 1 sino ad H, e guardare se alcuno renda n^2+1 esattamente divisibile per $2H$, di sorta che il quoziente sia numero intero. Tentando io pertanto di formare un esempio, ho osservato ciò che segue.

Osservazione. Presi avendo, in continua serie dapprima, poi a salto, molti numeri quadrati, avendo a ciascun di loro aggiunto 1, e cercato avendo delle somme n^2+1 i divisori, ho sempre ritrovato, che questi erano di que' numeri, che sono composti di due quadrati interi, e si possono in genere rappresentare per la somma t^2+u^2; e che della stessa natura erano i numeri quozienti. Dunque per l'artifizio del chiarissimo la Grange non altra soluzione del problema di Leonardo ottener si può, che quella da principio per me esposta, e tratta dalle tenebre di Fra Luca. Pensava alla dimostrazione di ciò, che osservato aveva, quando fissata l'attenzione sul teorema fondamentale dell'artifizio, del quale manca l'addizione dello stesso la Grange all' algebra indeterminata di Eulero, ma di cui va ricca la citata di lui Memoria, m'avvidi che da esso teorema medesimo la desiderata dimostrazione tirar poteva, ritornando la quantità $n^2 - B$, della quale è particolar caso $n^2 + 1$, alla sua origine, ed alla sua velata rappresentazione. Rappresenta $n^2 - B$ per sua natural instituzione il prodotto $(z^2 - Bq^2)$ $(z'^2 - Bq'^2)$; dunque non può essere in genere divisibile, che per un numero della forma, o natura di questi due fattori. E nel caso particolare di $B = -1$ essendo $n^2 + 1$ per nativa proprietà rappresentazion del prodotto $(z^2 + q^2)$ $(z'^2 + q'^2)$, non è a maravigliarsi, che solo per numeri di due quadrati insieme giunti composti sia divisibile, e della natura stessa sieno i quozienti; chè anzi è tutto ciò intrinsecamente necessario. Ella par poi cosa più spedita il cercare se $2H$ sia l'aggregato di due quadrati interi separando da esso ordinatamente $1, 4, 9 \ldots$, e guardando se anche il residuo resti quadrato, così facendo sino ad ${}^*H$ metà di $2H$, di quello che a tutti i quadrati stessi $1, 4, 9 \ldots$, sino ad H, aggiugner 1, ed esplorar se le somme ammettano esatti divisori.

PARTE IV.

Somma delle serie de' numeri quadrati e de' cubici.

1.° Proposta la progressione naturale de' numeri $1.2.3.4.5.6.7.8 \ldots n$, assegnar la somma della serie dei quadrati loro $1.4.9.16.25.36.49.64 \ldots n^2$. La regola per ottenerla è prendere $\frac{n.(n+1).(n+n+1)}{(n+1-n).6}$, od anche pigliare $\frac{n^2+n}{2} . \frac{2n+1}{3}$. Vogliasi, per esempio, la somma dei quadrati dei numeri sino ad $n=8$: sarà essa $\frac{8.9.17}{1.6} = 4.3.17 = 204$, od eziandio $= \frac{64+8}{2} . \frac{17}{3} = \frac{72.17}{2.3} = 12.17 = 204$. La prima espressione è propiamente quella da Fra Luca posta a capo delle regole di Leonardo intorno alle somme delle serie de' numeri quadrati. Dopo l'intervallo di alquante pagine, e il divagamento in diverse cose aggiugne la seconda, che anche il Tartaglia riguarda per una regola dalla prima differente. Ma comecchè potesse ciò parere in numeri, in generali spezie però chiaramente si vede non essere la seconda, che una riduzion della prima. Ed effettuando il prodotto riducesi per fine ad $\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$.

2.° Esibita la progressione aritmetica dei numeri dispari $1.3.5.7.9.11.13\ldots.2n-1$, raccoglier la somma della serie dei quadrati loro $1.9.25.49.81.121.169\ldots.(2n-1)^2$. Sarà la richiesta somma $=\frac{(2n-1).(2n+1).(2n-1+2n+1)}{(2n+1-(2n-1)).6}$. Desiderando, per esempio, la somma dei quadrati de' numeri dispari sino a $2n-1=9$, si avrà $1+9+25+49+81=\frac{9.11.20}{2.6}=3.11.5=165$. L'espression generale della regola ammette le riduzioni $\frac{(2n-1).(2n+1).4n}{2.6}=\frac{(2n-1).(2n+1).n}{3}=\frac{4}{3}n^3-\frac{1}{3}n$.

3.° Essendo $2.4.6.8.10.12\ldots\ldots2n$ la progressione aritmetica dei numeri pari, presentar la somma della serie dei quadrati loro $4.16.36.64.100.144\ldots\ldots4n^2$. Eccola in $\frac{2n.2(n+1).(2n+2(n+1))}{(2(n+1)-2n).6}$. Se, ad esempio, si cerchi la somma dei quadrati de' numeri pari sino a $2n=10$, si troverà la medesima $=\frac{10.12.22}{2.6}=10.22.220$. L'espression generale si contrae in $\frac{2n.2(n+1).(4n+2)}{2.6}=\frac{n.(n+1).(4n+2)}{3}=\frac{4}{3}n^3+2n^2+\frac{2}{3}n$.

4.° Formata la progressione aritmetica $a.2a.3a.4a.5a.6a.7a\ldots\ldots na$ cominciante da un numero qualsivoglia a, e crescente di termine in termine continuamente dello stesso numero a, determinar la somma della serie dei quadrati de' termini $a^2 . 4a^2 . 9a^2 . 16a^2 . 25a^2 . 36a^2 . 49a^2 \ldots . n^2 a^2$. La esprime $\frac{na . (na+a) . (na+na+a)}{(na+a-na) . 6}$. Sia, ad esempio, $a=5$, e la progressione $5 . 10 . 15 . 20 . 25 . 30 . 35 \ldots . n5$; e si addomandi la somma della serie dei quadrati dei termini sino al quarto: fatto $n=4$ sarà $25+100+225+400=\frac{20 . 25 . 45}{5 . 6}=2 . 25 . 15=750$. L'espression generale riceve compendiata la forma $\frac{a^3 . n . (n+1) . (2n+1)}{a . 6}=\frac{a^2 . n . (n+1) . (2n+1)}{6}=a^2\left(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\right)$, la quale non è, che la somma del problema primo moltiplicata con a^2, siccome esser doveva, essendo la progressione $a . 2a . 3a \ldots . na$ non altro, che la progression naturale $1 . 2 . 3 \ldots . n$ moltiplicata in ciascun termine per a, nè altro essendo la serie $a^2 . 4a^2 . 9a^2 . \ldots . n^2 a^2$ che la serie $1 . 4 . 9 \ldots . n^2$ moltiplicata in ciaschedun termine per a^2

Le quattro regole di Leonardo convengono in una sola, che in sostanza è: dei numeri in aritmetica progressione, dei quali debbon sommarsi i quadrati, si prenda il massimo, e quello che lo segue, e la somma loro; si faccia di questi tre numeri il prodotto, e si divida per sei volte la differenza tra esso massimo, e quello che lo segue, o, che è lo stesso, per sei volte la differenza costante della progressione; si avrà la desiderata somma de' quadrati. Sembra però dal dire di Fra Luca, che Leonardo dimostrasse ad una ad una le sue regole; ma dobbiamo di lui dolerci, che abbia interamente omesso per sin un tocco di esse dimostrazioni, avvertendo solo, che erano geometriche; il che così io intendo, e stimo doversi intendere: che Leonardo, ad ajutar, come soleva, per l'occhio la mente, rap-

presentasse per linee i numeri, e su di esse aggirasse i raziocinj. Archimede nella proposizione decima su le spirali prende a dimostrare, che essendovi una serie di linee, le quali continuamente si eccedano della stessa linea, dalla quale la serie comincia; il quadrato della massima preso tante volte, quante sono le linee, più una volta, aggiunto il rettangolo della minima linea in una uguale alla somma di tutte, formano il triplo della somma dei quadrati di ciascheduna linea. Sostituite alle linee le astratte spezie rappresentanti in uno, e linee e numeri, lo spirito della dimostrazione è questo. Sia la progressione $a.2a.3a.4a \ldots\ldots na$, della quale si tolgano a considerare gli otto primi termini . . . . $a.2a.3a.4a.5a.6a.7a.8a$;
e scritti i sette primi . . . . $7a.6a.5a.4a.3a.2a\ .\ a$
con ordine rovescio al di sotto, si piglino le somme $a+7a$, $2a+6a$, $3a+5a$, $4a+4a$, $5a+3a$, $6a+2a$, $7a+a$, ciascheduna delle quali vedesi essere $=8a$: onde ne segue, che l'assumere l'aggregato $(a+7a)^2+(2a+6a)^2+(3a+5a)^2+(4a+4a)^2+(5a+3a)^2+(6a+2a)^2+(7a+a)^2+(8a)^2+(8a)^2$, torni lo stesso che il prendere nove volte il quadrato del massimo termine $8a$. Or in esso aggregato contengonsi già due volte i quadrati di tutti otto i termini; e di più si contengono i doppj rettangoli $2.a.7a$, $2.2a,6a$, $2.3a.5a$, $2.4a.4a$, $2.5a.3a$, $2.6a.2a$, $2.7a.a$. Che se dunque dimostrisi, che la somma di questi doppj rettangoli con il prodotto insieme del minimo termine a nella somma di tutti otto $a+2a+3a+4a+5a+6a+7a+8a$ è uguale ad un'altra volta la somma dei quadrati di ciascun di loro, resterà dimostrato, che nove volte il quadrato del massimo termine $8a$, più il prodotto del minimo con la somma di tutti son il triplo dell'aggregato dei

quadrati di ciascheduno. Ma per una parte $2.a.7a+2.2a.6a+2.3a.5a+2.4a.4a+2.5a.3a+2.6a.2a+2.7a.a+a(a+2a+3a+4a+5a+6a+7a+8a)=a(1.8a+3.7a+5.6a+7.5a+9.4a+11.3a+13.2a+15.a)$; per altra parte $(8a)^2=a.8a+a.7.8a=a.8a+a(a+7a)+a(2a+6a)+a(3a+5a)+a(4a+4a)+a(5a+3a)+a(6a+2a)+a(7a+a)=a(8a+2.7a+2.6a+2.5a+2.4a+2.3a+2.2a+2.a)$; e similmente si possono sciogliere gli altri quadrati $(7a)^2$ $(6a)^2\ldots$, di modo, che ordinatamente schierando si ha

$$\begin{array}{ll}
(8a)^2= & a(8a+2.7a+2.6a+2.5a+2.4a+2.3a+2.2a+2.a)\\
(7a)^2= & a(7a+2.6a+2.5a+2.4a+2.3a+2.2a+2.a)\\
(6a)^2= & a(6a+2.5a+2.4a+2.3a+2.2a+2.a)\\
(5a)^2= & a(5a+2.4a+2.3a+2.2a+2.a)\\
(4a)^2= & a(4a+2.3a+2.2a+2.a)\\
(3a)^2= & a(3a+2.2a+2.a)\\
(2a)^2= & a(2a+2.a)\\
a^2= & a.a
\end{array}$$

e perciò raccogliendo

$(8a)^2+(7a)^2+(6a)^2+(5a)^2+(4a)^2+(3a)^2+(2a)^2+a^2=a(1.8a+3.7a+5.6a+7.5a+9.4a+11.3a+13.2a+15.a)$: dunque rimane, rapporto agli otto primi termini della progressione, dimostrato ciò che si era proposto. E per la legge, che si dà a divedere negli scioglimenti de' quadrati, rendesi manifesto non aver la dimostrazione confine, ed illimitatamente estendersi a qualunque numero di termini. Questa dimostrazione di Archimede per l'astratta espression letterale recata a quella generalità, speditezza, e luce, che lo specioso calcolo suol donare, è quanto alla sostanza quella, che leggesi nella versione del siciliano Maurolico. Il francese Rivault di Flurance, ommessa la soluzion de' quadrati, riduce l'ultima parte della dimostrazione al fatto della uguaglianza delle somme numerarie, trovandosi $(8a)^2 + (7a)^2 + (6a)^2 + (5a)^2 + (4a)^2 + (3a)^2 + (2a)^2 + a^2 = 204$, e facendo altrettanto la somma dei doppi rettangoli ed il prodotto del minimo termine nell'aggregato di tutti. Nella qual material prova, tolta di vista la legge costituente la ragione intrinseca dell'uguaglianza, non apparisce, se la verità particolare sia effetto di una generale necessità, o piuttosto di una particolar combinazione; e perciò la dimostrazione resta priva di convenevole forza ed ampiezza, mancando la sicura scorta ad una illazion indefinita. Ho io voluto tentare se potevasi dalla natura della progressione dei numeri dispari de' quadrati tutti genitrice immediatamente dedurre la regola per la somma, ed ho scoperto dedurlasi ottimamente. Si denotino a maggior agevolezza i quattro primi termini di essa progressione $1 . 3 . 5 . 7$ per le lettere a, b, c, d, ed il quinto che segue per e; s'indichi il numero 4 de' termini per n; si rappresentin per α, β, γ, δ i primi quattro quadrati $1 . 4 . 9 . 16$. Si sa essere $= n^2$ la somma di numero n termini della progressione de' numeri dispari, l'ultimo de' quali $= 2n - 1$, essendo $(2n - 1 + 1) . \frac{n}{2} = n^2$. Ma $2n - 1 + 1$ ugualmente che la somma dell'ultimo termine $2n - 1$, e del primo 1, puossi, scrivendo $2n + 1 - 1$, concepir espression del termine seguente $2n + 1$ meno il primo 1: dunque si avrà successivamente discendendo

$$d + c + b + a = (e - 1) . \frac{n}{2} = \delta$$

$$c + b + a = (d - 1) . \frac{n-1}{2} = \gamma$$

$$b + a = (c - 1) . \frac{n-2}{2} = \beta$$

$$a = (b - 1) . \frac{n-3}{2} = \alpha$$

Aggiungasi $(a-1).\frac{n-4}{2}=0$; e raccolti i prodotti resulterà $\frac{n}{2}(e+d+c+b+a)-\frac{1}{2}(d+2c+3b+4a)-\frac{1}{2}(n+n+n+n+n)+\frac{1}{2}(1+2+3+4)=\delta+\gamma+\beta+\alpha$. La quantità $d+2c+3b+4a$ si distribuisce di nuovo in

$$\begin{aligned} d+c+b+a&=\delta\\ c+b+a&=\gamma\\ b+a&=\beta\\ a&=\alpha \end{aligned}$$

con che rendesi manifesto esser $-\frac{1}{2}(d+2c+3b+4a)=-\frac{1}{2}(\delta+\gamma+\beta+\alpha)$. Dunque $\frac{n}{2}(e+d+c+b+a)-\frac{1}{2}(n+n+n+n+n)+\frac{1}{2}(1+2+3+4)=\frac{3}{2}(\delta+\gamma+\beta+\alpha)$, o sia $n(e+d+c+b+a)-(n+n+n+n+n)+(1+2+3+4)=3(\delta+\gamma+\beta+\alpha)$. Vedesi chiaro, che, siccome supposto $n=4$ la somma $e+d+c+b+a$ si estende sino al quinto termine e della progressione dei numeri dispari, così in genere si estenderà sino ad inchiudere il termine $n+1^{esimo}$, e perciò essa somma varrà $(n+1)^2$; che siccome in esso supposto di $n=4$ nel termine $-(n+n+n+n+n)$ l'n è ripetuto cinque volte, così sarà in genere ripetuto $n+1$ volte, onde il valore in genere di tale aggregato negativo sarà $-n.(n+1)=-n^2-n$; che siccome per fine nello stesso supposto di $n=4$ la somma $1+2+3+4$ estendesi sino al quarto termine della progression naturale, così in genere estenderassi al termine n^{esimo}, e varrà conseguentemente $(n+1).\frac{n}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$: onde conchiudesi essere in genere $n(n+1)^2-n^2-n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=3(\alpha+\beta+\gamma+\delta....)=3(1+4+9+16.....)$, o sia $\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n=1+4+9+16.....$ Determinata per la via archimedea la somma delle serie del problema 4.°, si de-terminan le somme delle serie dei problemi 1.° e 3.°, con il solo fare $a = 1$, $a = 2$; e reciprocamente determinata nella maniera, che io vengo dal dimostrare, la somma della serie del problema 1.° non si ha che a moltiplicarla per 4 ad aver la somma della serie del problema 3.°, e per a^2 ad aver la somma della serie del problema 4.°. Rimane a dimostrarsi la somma nel 2.° problema assegnata della serie de' quadrati dei numeri dispari. Ma riflettasi, che preso nella serie continua de' quadrati di tutti i numeri naturali, oggetto del problema 1.°, un numero di termini $2n$, si avrà in esso un numero n di quadrati di numeri dispari, ed un numero parimente n di quadrati di numeri pari; per la qual cosa, se nella espression della somma della serie continua dei quadrati di tutti i numeri esposta nel problema 1.° in luogo di n pongasi $2n$, e dopo da essa sottraggasi la espression della somma della parzial serie de' quadrati dei numeri pari, offerta nel problema 3.°, ne verrà la somma di un numero n di termini dell'altra parziale serie dei quadrati de' numeri dispari. Sarà dunque questa:

$$\frac{2n.(2n+1).(4n+1)}{6} - \frac{2n.2(n+1).(4n+2)}{2.6} = \frac{n.\big((2n+1).(4n+1)-(n+1).(4n+2)\big)}{3} =$$

$$\frac{n.\big(8n^2+6n+1-(4n^2+6n+2)\big)}{3} = \frac{n.(4n^2-1)}{3} = \frac{n.(2n-1)(2n+1)}{3},$$ siccome nel problema 2.° si è prescritto. Del resto abbiamo nella moderna teoría delle serie una dimostrazione diretta di questa non meno che delle altre tre somme, ed una general espressione, che tutto insieme le comprende. Il principio comune, su cui si fonda, è, che i quadrati a^2, $(a+d)^2$, $(a+2d)^2$, $(a+3d)^2$, $(a+4d)^2$ ...... de' termini di una progressione aritmetica qualunque costituiscono una serie a differenze seconde costanti, essendo le differenze prime

$2ad+d^2$, $2ad+3d^2$, $2ad+5d^2$, $2ad+7d^2$...., e le differenze di queste $2d^2$, $2d^2$, $2d^2$..... Di una serie poi a differenze seconde costanti, il cui termine generale si esprima per $A+Bn+Cn^2$, la somma è $(A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{6}C)n+(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C)n^2+\frac{1}{3}Cn^3$: poichè se in questa, in luogo di n si sostituisca $n-1$, invece della somma sino al termine n^{esimo} si avrà la somma sino al termine $n-1^{esimo}$; e sottraendo questa da quella somma, debbe uscirne la grandezza del termine n^{esimo}, o sia l'espressione stessa $A+Bn+Cn^2$ del termine in genere della serie; e così succede, come si vedrà a prova. Applicando ora il termine generale $A+Bn+Cn^2$ alla serie $1.4.9.16.25......n^2$ del problema 1.°, si ha $A=0$, $B=0$, $C=1$; dunque la somma $=\frac{1}{6}n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n^3$. Nella serie del problema 2.° $1.9.25.49.....(2n-1)^2$ essendo il termine generale $(2n-1)^2=4n^2-4n+1$, confrontatolo con $A+Bn+Cn^2$, resulta $A=1$, $B=-4$, $C=4$, conseguentemente la somma $=(1-2+\frac{2}{3})n+\frac{4}{3}n^3=-\frac{1}{3}n+\frac{4}{3}n^3$. Paragonato con $A+Bn+Cn^2$ il termine generale $4n^2$ della serie $4.16.36.....4n^2$ del problema 3.°, ne viene $A=0$, $B=0$, $C=4$, e quinci la somma $=\frac{2}{3}n+2n^2+\frac{4}{3}n^3$. Finalmente il confronto del termine generale n^2a^2 della serie del problema 4.° con $A+Bn+Cn^2$ dà $C=a^2$, e perciò la somma $=\frac{a^2}{6}n+\frac{a^2}{2}n^2+\frac{a^2}{3}n^3$.

5.° Elevato ciascuno de' numeri $1.2.3.4.5.6.7.8.9.....n$ della continua natural progressione a cubo, ritrovar della serie dei cubi $1.8.27.64.125.216.343.....n^3$ la somma. Prendasi il prodotto quadrato $(\frac{n}{2})^2\times(n+1)^2$. Ad aver per esempio la somma de' cubi dei numeri da 1 sino a 6, essendo $n=6$, piglia $(\frac{6}{2})^2\times(6+1)^2=3^2.7^2=9.49=441$.

Non dice Fra Luca, che questa regola sia di Leonardo; anzi disgiungendola per qualche intervallo da quelle per le somme de' quadrati, che espressamente gli attribuisce, avrebbesi ad argomentare, se non fosse Fra Luca scrittore disordinato qual è, di altro analista a Leonardo posteriore essere l'invenzione. Cardano a Fra Luca medesimo, cui a questa occasione la lode concede di ottimo aritmetico, fa l'onore, sì della regola per sommare la continua serie de' quadrati, sì di questa per sommare la serie continua de' cubi: ma quanto alla prima lo smentisce Fra Luca stesso in asserirla di Leonardo; e quanto alla seconda è a credere, che egli non avrebbe taciuto esser sua, se stata lo fosse. Rimanendo pertanto incerto e sconosciuto l'inventore di tal regola, ho stimato di qui collocarla, essendo luogo, dove cadeva meglio, che in qualunque altro. Siccome nulla dell'autore, così nulla Fra Luca tocca di ciò che spetta la ragion della regola. Per i moderni lumi su le serie è noto in primo luogo, che i cubi a^3, $(a+d)^3$, $(a+2d)^3$, $(a+3d)^3$, $(a+4d)^3$, $(a+5d)^3$, $(a+6d)^3 \ldots\ldots (a+(n-1)d)^3$ de' termini di una progressione aritmetica formano una serie a differenze terze uguali, per esser le differenze prime $3a^2d+3ad^2+d^3$, $3a^2d+9ad^2+7d^3$, $3a^2d+15ad^2+19d^3$, $3a^2d+21ad^2+37d^3$, $3a^2d+27ad^2+61d^3 \ldots$ le differenze di queste, o sia le differenze seconde $6ad^2+6d^3$, $6ad^2+12d^3$, $6ad^2+18d^3$, $6ad^2+24d^3 \ldots$ e le differenze di queste, che differenze terze voglionsi chiamare, $6d^3$, $6d^3$, $6d^3 \ldots\ldots$ tutte uguali. Si sa in secondo luogo, che essendo $A+Bn+Cn^2+Dn^3$ il termine generale di una serie a differenze terze costanti, la somma di un numero di termini n è $(A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{6}C)n+(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C+\frac{1}{4}D)n^2+(\frac{1}{3}C+\frac{1}{2}D)n^3+\frac{1}{4}Dn^4$. Di qui ci vien dato di facilmente dedurre la somma non solo della serie continua ed intera de' cubi dei numeri tutti, ma delle serie ancora parziali dei cubi, o de' soli numeri dispari, o de' soli pari. Nella serie continua ed intera dei cubi di tutti i' numeri naturali il termine generale è n^3, ed imperciò $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1$, con che la somma viene ad essere $\frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^4 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 \times (1 + n)^2$ come nel volume di Fra Luca si prescrive. Ed è da osservarsi, che $\left(\frac{n}{2}\right)^2 \times (n+1)^2$ è il quadrato della somma $\frac{n}{2} \times (n+1)$ della progressione naturale dei numeri semplici $1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 \ldots\ldots n$: dunque il quadrato della somma di questi è la somma dei cubi loro. Il termine generale della serie parziale dei cubi dei numeri dispari, cioè della serie $1 . 27 . 125 . 343 . 729 \ldots\ldots (2n - 1)^3$ si trova adempiendo l'elevazione $(2 - 1)^3 = 8n^3 - 12n^2 + 6n - 1$, che confrontato con $A + Bn + Cn^2 + Dn^3$ dà $A = -1$, $B = 6$, $C = -12$, $D = 8$; donde l'espression della somma riesce $-n^2 + 2n^4$. Ad esempio sia $n = 4$, sarà la somma dei quattro cubi $1 . 27 . 125 . 343 = -16 + 2 . 256 = 496$. Della serie parziale dei cubi de' numeri pari $8 . 64 . 216 . 512 . 1000 \ldots (2n)^3$, essendo il termine generale $8n^3$, cioè il prodotto del termine generale n^3 della serie intera moltiplicato per 8, è chiaro, che la somma similmente sarà la somma di quella moltiplicata per 8, e sarà per conseguenza $2n^2 + 4n^3 + 2n^4$.

Riferisce Targion Tozzetti nel tomo II de' suoi Viaggi, che tra i manoscritti della biblioteca del regio Spedale di santa Maria-Nuova di Firenze conservavasi in un grossissimo volume in-foglio un trattato di abaco compilato da un anonimo, il quale, a libro 16.° della compilazione avea posto il lavoro di Leonardo sopra i numeri quadrati. Desiderando io di questo copia, ne scrissi al dottissimo amico abate Francesco Fontani bibliotecario della Riccardiana; ma ebbi risposta, che essendosi alcuni anni addietro dispersa quella librería, non avea potuto della sorte di quel codice sapere cosa alcuna. Ho io in conseguenza dovuto, con fatica certamente assai maggiore di quella che l'originale cagionato avrebbemi, raccogliere le dottrine di Leonardo dal ceneraccio, a dir con Annibal Caro, di Fra Luca. Avrà forse questi ai problemi indeterminati di Leonardo meschiato alcuno da analista posteriore aggiunto; ma siccome dai principj per Leonardo insegnati scaturito, non gli sconviene il riunimento alla sua sorgente. Non farò a Fra Luca senza un argomento il torto di aver per l'opposto ommesso qualche problema, qualche artifizio di Leonardo sottile ed importante. Ciò, di che sicuramente ci ha privati, si è persino di un esempio delle geometriche dimostrazioni, onde all'avvertir di lui stesso, Leonardo corredati avea e lumeggiati gli scioglimenti suoi. Io mi figuro il libretto di Leonardo in qualche parte simile all'opera *Diofanto Geometra* di Billy. Ebbe notizia del trattato di Leonardo intorno ai numeri quadrati Xilandro *memini me aliquando legisse Leonardum quendam Pisanum de numeris quadratis scripsisse librum*. Ma è precipitato il giudizio; chè indubitatamente soggiugne *non dubito quin ex nostro transtulerit Diophanto*. L'aver Leonardo dopo Diofanto scritto su la stessa materia, non è buona ragione per inferir senza esitanza, che Leonardo abbia da Diofanto tolto, e su le sue carte trasferito ciò che era di lui; nè altra aver ne poteva Xilandro, che veduto non avea il libretto di Leonardo a farne confronto con l'opera di Diofanto; che non sapeva del viaggio di Leonardo in Africa, della educazione, dell'ammaestramento di lui su le coste di essa tra gli arabi, delle sue navigazioni per oggetti di traffico alla Sicilia, alla Grecia, alla Siria, della sua cura in mezzo aí negozj di apprendere quanto nella scienza de' numeri in ogni parte studiavasi; che ignorava eziandío la versione araba di Diofanto per Moamad AlBuziani circa la metà del secolo x. Attesi però questi fatti sembra acquistar fondamento il pensier di Xilandro, e soda ragione offrirsi di credere, ch'egli abbia per sorte colto nel vero. Aggiungasi, che lo stesso Moamad AlBuziani, non pago di aver tradotto, ed illustrato con comenti Diofanto, compose in oltre un libro di dimostrazioni delle proposizioni, che nei libri di Diofanto occorrono; dal qual libro sorge tosto in animo, che Leonardo tratte abbia le geometriche dimostrazioni, che Fra Luca accenna. Con tutto ciò nasce difficoltà nel confronto delle quistioni di Diofanto, e di quelle di Leonardo; poichè, anzi che scorgervi quella rassomiglianza, che esser vi dovrebbe tra l'originale e la copia, grande è la diversità che vi si ravvisa. Non si osservan che tre quistioni a Diofanto, ed a Leonardo comuni, e non senza qualche differenza. Ho già notato a luogo la differenza tra il problema 1.° di semplice ugualità di Leonardo, e la quistion XI del libro II di Diofanto. Nel 2.° problema, che non è appresso Diofanto che un porisma, richiede Leonardo, che li due numeri, i quadrati de' quali debbono insieme giunti formar quadrato, sieno non solo razionali, ma anche interi; condizione non richiesta da Diofanto; e la seconda risoluzione, che Leonardo ne dà, è cavata da una origine, della quale Diofanto non fa mai uso. I problemi 3.° e 4.° non formano presso Diofanto che una quistione, la x del libro II, ed una comune soluzione ricevono. Questi tre problemi sono di semplice ugualità: dei problemi di doppia ugualità di Leonardo non ve ne ha in Diofanto uno. Si offrono nei libri di questo molti elegantissimi e sottilissimi problemi da Leonardo non toccati, e reciprocamente ne tratta egli alcuni di singolare beltà e finezza, che in Diofanto non trovansi, almeno nei libri, che di lui ci restano. Le maniere in generale di sciogliere di Leonardo sono diverse da quelle di Diofanto. Gli scioglimenti di Leonardo ne' problemi di semplice ugualità non presentan la forma degli artifizj di semplice ugualità di Diofanto: e ben più lungi, che alcuno degli artifizj di doppia ugualità di questo intraveggasi negli scioglimenti dei problemi di doppia ugualità di Leonardo. Ambidue e Diofanto e Leonardo si appoggiano su di Euclide, su la quarta e su la quinta del libro II degli Elementi; ma in modo diverso: Leonardo in modo più prossimo e più inerente; Diofanto in modo più rimoto e più astratto. Leonardo non esibisce di alcuni problemi, quali sono li 5.° e 6.° di semplice ugualità, che risoluzioni determinate; laddove l'artifizio di Diofanto le porge indeterminate, e il greco analista le avrebbe certamente a suo modo tali offerte, accennando nelle posizioni l'arbitrio de' numeri. Ristrignesi da Leonardo ad un sol de' due casi, e non più che in una maniera si dà sciolto il problema di trovare due quadrati nell'assegnato intervallo, il qual Diofanto tratta in tutta estensione, e indefinitamente scioglie. Queste ultime considerazioni mi muovono singolarmente, e penso, che avranno parimenti fatto colpo su l'animo del leggitore. Come persuaderci, che Leonardo versando l'opera di Diofanto non avesse appresi gli artifizj di Diofanto, ed apparato non avesse a sciogliere indefinitamente tutti i problemi, che ne sono capaci? Come indurci a credere, che tenendo sotto de' suoi occhi la riferita quistion di Diofanto, in faccia della illimitata ampiezza di essa limitato si fosse e nella proposta, e nello scioglimento? Io non so dunque piegar la mente a pensare, che Leonardo abbia veduto l'opera di Diofanto, e da lui abbia tolto; tanto più che non nominandolo, troppo mancato avrebbe di onestà; e che nominato non l'abbia con tutta probabilità si deduce dal non farne menzione veruna Fra Luca, nè dove i problemi di Leonardo intorno ai numeri quadrati inserisce, nè là dove in erudizione sfoggiando (pag. 67) tesse il novero dei più insigni aritmetici di diversi tempi, e di nazioni differenti, non nominando tra' greci che Pitagora, e Nicomaco. Tragittò Leonardo per affari di traffico alla Grecia, e pel vivo stimolo di sua bella curiosità filosofica avrà cercato del sistema aritmetico, che colà si usava, e del meglio, che in scienza di numeri studiavasi; ma era quella per la Grecia stagione, nella quale non è ad infingersi, che vi si studiassero le sottilità di Diofanto: in troppo alto abbandono eran le scienze sepolte. Quanto alla interpretazion di Diofanto, ed alle dimostrazioni delle proposizioni di lui per Moamad AlBuziani è da osservare, che questi era del castello di Bozgian soggetto alla città di Nischabourg nel Khorasan, l'antico regno de' Parti, donde l'anno 959 passò egli nella Irac babilonese ad apprender prima, ed insegnar poscia le matematiche discipline. Non si sa quanto largo di là si difondessero i libri di lui su Diofanto, ai quali mancava il favor della stampa, e disfavor creava la sottigliezza medesima dell'originale, e di loro stessi. Non leggesi, che gli arabi trionfatori li trasportassero nella Spagna, e ne arricchissero ivi alcuna biblioteca, nè raccontasi, che i desiderosi di scienza, che da altre parti di Europa si trasferirono ad istruirsi presso gli arabi o nella Spagna, o nell'Africa, o nell'Asia, e che diligentemente raccolsero, come gemme, le opere de' greci matematici nell'araba lingua voltate, e di comenti dagli arabi maestri illustrate, recassero alcuno di quei due scritti di Moamad AlBuziani su Diofanto alle patrie loro. Le quali cose considerate non ripugna il dire, che Leonardo ad onta di suo lungo soggiornare tra gli arabi su i lidi d'Africa, e di suo valicar alla Sicilia, alla Grecia, alla Siria non abbia veduto nè nella greca original lingua, nè nell'araba versione, e nelle dimostrazioni di Moamad AlBuziani l'opera di Diofanto; e per altra parte fortissimi argomenti persuadono, che veduta realmente non l'abbia. Non pretendo contuttociò di far Leonardo inventore di quanto intorno ai numeri quadrati ha scritto. Può egli aver ricevuti molti lumi su l'argomento dagli arabi suoi maestri, e saranno quei lumi in parte stati figli delle diofantee dottrine presso gli arabi dottori via via propagate per la interpretazione, e per le dimostrazioni di Moamad AlBuziani. Dico in parte, e avanti di aprire interamente il mio pensiero, osservo trovarsi nel lungo catalogo delle opere del gran Thabeto ben Corrah, detto anche Thebit, nato in Carrhe della Mesopotamia l'anno 835, e perciò di circa un secolo anteriore a Moamad AlBuziani, un libro *De numeris polygonis*. Ha Diofanto un libro con lo stesso titolo; ma non è lecito immaginarsi, che il libro di Thebit sia una versione, un comento, un seguito di quel di Diofanto. Thebit, oltre a comporre moltissime opere di suo proprio ingegno, si rendè benemerito per un numero non minore di traduzioni, di epitomi, di illustrazioni di scritti di greci autori e medici, e matematici; ma fu fedele in intitolare i libri giusta ciò che erano. Con qual ragione crederemo, che egli sia mancato a sè stesso nel libro dei numeri poligoni? Thebit era assai grande da sè, e sarebbe in lui stata una meschinità turpissima il voler ingrandire dell'altrui grandezza. Combinando pertanto le cose, io concepisco così: che fosse tra gli arabi una dottrina su i numeri poligoni di arabe e di diofantee invenzioni composta, singolarmente estesa rispetto ai numeri quadrati, dilatandosi oltra le generazioni, oltra le somme delle serie loro, ai problemi indeterminati di semplice e doppia ugualità, geometricamente dimostrata secondo il gusto tra gli arabi regnante; che Leonardo beesse nelle arabe scuole e nelle conversazioni cogli arabi sapienti le regole precipue di essa dottrina, e che qualche cosa, capace che n'era, aggiugnesse intorno ai numeri quadrati, su di essi di proposito versando, del suo.

Montucla non ha parola del libro di Leonardo su i numeri quadrati; e per non aver avuto notizia dei problemi in esso trattati ommise di contare Leonardo tra quelli, che in analisi indeterminata versarono e scrissero; con che gli diminuì di un ramo il serto di gloria dovutogli, richiedendo verità, che si riconosca primo maestro, e quasi padre in queste regioni della determinata e della indeterminata analisi ugualmente: e tanto più inescusabile è del francese Storico delle matematiche la colpa, quanto più facil gli era apprender questo punto di storia da Fra Luca, il quale nell'esporre i problemi di Leonardo spende, per mutilar che faccia, più pagine, lui nel preambolo, lui tra via, lui nel fin nominando.

Il Bossut nel discorso preliminare alla parte matematica della *Enciclopedia metodica* loda nel terzo periodo della compendiosa matematica storia, che ivi tesse, Maurolico di Sicilia, il quale profondo in tutte le parti delle matematiche si distinse con appigliarsi ad un ramo di calcolo allora pressochè sconosciuto, qual fu la sommazione di molte serie di numeri, come la serie dei numeri naturali, quella dei loro quadrati, quella dei triangoli ec., e diede su questo soggetto de' teoremi pregevoli per la sottigliezza dell'invenzione, e per la semplicità dei resultati. Così Bossut, soggiugnendo poter ciò valere a prova del suo piacere in render giustizia ai saggi di estera nazione. Egli debbe accusare il Montucla, del quale contrasse i volumi, di non averlo in essi avvisato delle somme delle serie e intera, e parziali de' quadrati, che Leonardo insegnò, e della somma delle serie de' cubi, che se non fu dottrina di lui, fu di altro italiano ingegno a lui succeduto ritrovamento: Montucla gli tolse il piacere di rendere a Leonardo, ed a quest' altro italiano sapiente, se fu diverso, non altrimenti che a Maurolico, giustizia. Io ho tralasciato a bello studio di addurre le dimostrazioni, che intorno alle somme della serie de' quadrati, e di quella de' cubi leggonsi nel libro di Maurolico, perchè a lui, alla sottil sua teoria su i numeri poligoni destino un Capo a parte.

CAPO VI.

Dell'origine dell'analisi tra gli arabi.

§. I. Ho nel capo IV. §. X. trattato la quistione, se sia stato Diofanto tra i greci l'inventor dell'analisi delle equazioni; e distinta dall'analisi determinata l'analisi indeterminata, parmi di aver con buone ragioni provato non potersi a Diofanto attribuir la gloria che di primo autore dell'analisi indeterminata, e doversi riconoscere a lui anteriore l'invenzione dell'analisi determinata: e con tal distinzione, alla quale non si era posto mente, quantunque necessariamente segua dall'attento esame dell'opera stessa di Diofanto, mi lusingo di aver tenuto fra le due opinioni una via di mezzo non disaggradevole ai sostenitori nè dell' una, nè dell'altra, e nella quale anzi possano e gli uni, e gli altri facilmente discendere a conciliarsi. Entro al presente nella controversia su l'origine dell'analisi tra gli arabi: se da Diofanto l'abbiano presa? se prima di conoscer Diofanto alcuno di loro gente l'abbia inventata? se altronde l'abbiano ricevuta? Io credo non esservi quistione più intralciata di questa. Molti su di essa scrissero, e nelle particolari storie della matematica, e nelle generali delle scienze, e nelle affatto immense di ogni letteratura, altri francamente pronunziando, altri con più prudente contegno proponendo un dubitoso sentimento. Ma fuvvi chi recò autorità false, chi ommise le vere e gravi, chi spinse oltre dovere le illazioni, chi a sè medesimo contraddisse. Io esporrò quanto mi è riuscito di ragunare, tenendo per fondamental ordine quello de' tempi, con libertà però di innestarvi con il minimo violamento possibile quello di unione di autorità affini, e quello del confronto di autorità ad autorità, o di autorità a conseguenza dedotta; e dopo tal discussione raccorrò quel giudizio, o parere, che da tutto insieme mi sembrerà più verisimilmente seguire.

§. II. Il libro più antico, che ci fornisca tratti relativi all'origine dell'analisi tra gli arabi è la *Biblioteca arabica de' filosofi*, scritta circa l'anno 1198 da anonimo egiziano, del quale parlando di proposito il Casiri nel tomo II della sua *Biblioteca arabico-hispanica* pag. 332, dice: *Id opus non indiligenti labore aggressus est*; ma in altro luogo, cioè a pag. 370 del tomo I, gli concede la lode di accuratissimo. Io ricorderò primieramente, che al nome dell'antichissimo e prestantissimo indiano astronomo Katka tra le pochissime opere d'indiani scrittori, che caddero nelle mani degli arabi, vien contato un libro di arte logistica: *Liber artis logisticae* (è traduzion del Casiri) *a Mohamedo ben Musa AlChuarezmita exornatus, qui caeteros omnes brevitate methodi, ac facilitate praestat, indorumque in praeclarissimis inventis ingenium, et acumen ostendit*; e ricorderò insieme come da altro luogo della stessa *Biblioteca arabica de' filosofi* raccogliesi, che Moamad ben Musa il Chuarezmita o Khuarezmita, vale dir di Chovaresm, o Khovarezem, più anticamente Chorasmia, regione dell'Asia all'oriente del mar Caspio, fiorì nei primi lustri del secolo IX, compendiato avendo a comodo di Almamon il libretto *Sindo Indo maggiore*. Di questi lumi valuto mi sono nella storia dell'aritmetica, investigando l'epoca, in cui dall'India passò in Arabia, e non saranno inutili nell'indagine presente. Nell'elogio di Moamad ben Moamad ben Jahia ben Ismail ben

Alabras Abulvapha, volgarmente detto AlBuzgiani, o AlBuziani, del quale ho io già verso il fine del Capo precedente divisato il sito dei natali, e il tempo di suo entrar nella matematica carriera, sono dall'anonimo, oltre parecchie altre di lui opere, enumerate le seguenti: *Commentarius in librum AlKhuarezmitae mathematici de algebra.* — *Commentarius in librum Diophantis de algebra.* — *Demonstrationes propositionum, quae in Diophanti libro occurrunt.* — *De universa arte logistica* lib. III. Non avendo questo persiano che all'anno 959 cominciato ad udire le lezioni aritmetiche, e geometriche di Alì Abu Jahia AlBavrdeo, e di Alì Alola Karnib nelle scuole dell'Irac babilonese, apparisce, che fu di un secolo e mezzo circa posteriore a Moamad ben Musa AlChuarezmita. Di luoghi di nascita non furon molto distanti, confinando tra loro la provincia del Khovarezem, e quella del Khorasan, nella quale situato era il castello di Buzgian. Per ciò che spetta all'opera dell'AlBuzgiani, che dall'anonimo egiziano vien detta *Commentarius in librum Diophanti de algebra*, l'armeno Abulfaragio scrive, al tradur di Pocok, *Mohammed AlBuziani Diophanti librum de algebra interpretatus est*; e giusta il parlar di Cicerone (1) *nec converti ut interpres sed ut orator* si dovrebbe intendere una versione piuttosto che un comento; ma a combinar, se si vuole, le espressioni, intenderemo una versione di spiegazioni accompagnata; e questo intendimento, o sia componimento d'idee, è tanto più fondato, quanto che scorrendo i cataloghi dall'anonimo egiziano tessuti, e dal Casiri in latino voltati, delle opere degli arabi autori, io scorgo a tutte quelle, che risguardano greci

---

(1) *De opt. gen. Orat.*

originali il titolo *Commentarius*, e per altra parte è naturale, che chi primo traduceva aggiugnesse anche illustrazioni, essendone l'originale bisognoso, qual è Diofanto. Ciò poi che più importa si è, per lo appunto non farsi nè dall' anonimo in tutta la sua *Biblioteca arabica de' filosofi*, nè dall'Abulfaragio nell'intera sua storia delle dinastie menzione di altri arabi lavori su Diofanto prima dei due di Moamad AlBuziani, nè tampoco dipoi. Per la qual cosa a chi se non ad esso Moamad AlBuziani riguarda egli l'anonimo stesso nell'encomio di Diofanto, scrivendo: *Diophantus alexandrinus egregius ac celebris aetate sua scriptor graecus laudatissimum de arte algebrica librum edidit qui et arabice conversus est?* Prosegue, e ciò è, che merita somma attenzione: *adeo ut quotquot de algebra scripsere illius fundamentis institerint. Quamobrem quisquis in hujusmodi librum altius penetraverit oceanum hoc in genere inveniet*. Il Casiri soggiugne *eadem refert Abulpharagius*. E chi non estenderebbe questo *eadem* del Casiri a tutte ugualmente le parti del parlar dell'anonimo, e non crederebbe da Abulfaragio ripetuto quanto quegli dice? Così di fatto ha creduto il chiarissimo abate Andres, il quale per conseguenza nel tomo v cap. III pag. 81 dopo aver voltato: *Diofanto fece un' opera lodatissima dell'arte algebraica, che è stata tradotta in arabo; e quanti poi hanno scritto di algebra, tutti si sono levati su' fondamenti di lui*: qui fermatosi non dubita su la fede del Casiri di affermare: *nella stessa guisa ne parla Abulfaragio nella sua storia*. Ma realmente manca in Abulfaragio ciò, che all'intenzione del Casiri e dell'abate Andres è l'essenziale, non dicendo egli altro nel luogo dal Casiri stesso citato, cioè alla pag. 89, che così: *Ex iis qui sub Juliano Apostata floruerunt etiam Diophantes, cujus li-*

ber, quem Algebram vocat, celebris est, in quem, si immiserit se lector, oceanum hoc in genere reperiet. Ripete bensì Abulfaragio, di più di un mezzo secolo all'anonimo egiziano posteriore, le ultime parole di lui, ma non ripete punto, che quanti arabi di algebra scrissero, siensi su i fondamenti di Diofanto levati. Anzi dal non adottar Abulfaragio questa asserzion dell'anonimo, in luogo di conferma di essa, come ha voluto tirare il Casiri, ne segue un argomento a sfavore. Ma consideriamo l'asserzion dell'anonimo in confronto degli altri lumi da lui stesso donatici. Non si può sostenere, che gli arabi abbiano da Diofanto tratta l'algebra, e che quanti dell'araba nazione di essa scrissero, levati si sieno su i fondamenti del greco analista, se appresso gli arabi in materia di algebra cominciato non siasi con tradurre, con illustrar Diofanto. Ma tutto al contrario non trovasi nella *Biblioteca* interpretazione di Diofanto prima di quella di Moamad AlBuziani, posteriore di un secolo e mezzo ad un' opera di algebra di Moamad ben Musa AlChuarezmita, su la quale l'interprete medesimo di Diofanto ebbe cura di lavorar un comento. Dunque, almen per i dati offerti dall' anonimo egiziano nella sua *Biblioteca arabica de' filosofi*, non si può sostenere, non si rende persuasibile, non par vera l'asserzione di lui, che quanti arabi di algebra scrissero, siensi su i fondamenti di Diofanto appoggiati. E crederemo poi, che se stata vi fosse avanti di quella di Moamad AlBuziani una interpretazion di Diofanto dell'algebra presso gli arabi vera madre, non se ne sarebbe gelosamente serbata memoria, e che l'anonimo, *Mahometano*, come scrive il Casiri, *orbe perlustrato, inspectisque bibliothecis celebrioribus*, acquistata non ne avrebbe, e nella *Biblioteca* sua *de' filosofi* inserita notizia?

§. III. Dalla *Biblioteca arabica de' filosofi* compilata dall' anonimo egiziano facciam passaggio alla geografia, e storia del Cazuineo, vale dire di Zaccaría ben Moamad ben Mahmud di Cazuin, o Casbin, città lungo tempo capitale dell'impero de' Persi, il quale morì l'anno dell'egira 674, dell'era nostra 1274. Questi al riferir del Casiri scrive, che primo di tutti ad insegnar ai maomettani l'algebra fu Moamad ben Musa Khuarezmita: *Omnium princeps teste Cazuineo algebrae artem mahometanis tradidit Mohamad ben Musa Khuarezmita*. Ed il Casiri adotta ciò nel tempo stesso, che su la sentenza dell'anonimo egiziano tiene essere stata l'algebra arabica una propaggine dell'analisi di Diofanto. A combinar però queste due cose insieme farebbe mestieri, che Moamad ben Musa Khuarezmita stato fosse tra i maomettani il primo a studiare Diofanto, a tradurlo, a spiegarlo. Eppure, non dirò solo, che il Casiri medesimo, offrendo nell'indice della sua *Biblioteca arabico-hispanica* il novero delle opere di lui, non parla di alcun lavoro di essolui su Diofanto; non dirò io solo questo, scordandosi ivi stesso il Casiri del libro di algebra del Khuarezmita matematico, sopra il quale traducendo la *Biblioteca arabica de' filosofi*, a scriver ebbe, che Moamad AlBuziani tessuto avea un comento; ma dirò, che in tutta essa *Biblioteca de' filosofi arabica* non leggesi, che Moamad ben Musa Khuarezmita siasi dei libri di Diofanto occupato; bensì del libro di *Arte logistica indiano*. Che se pongasi mente alla somma diligenza ed accuratezza dal Casiri, e nella prefazione pagina XIV, e nel tomo II pag. 5 celebrata nel Cazuineo in indagar da filosofo, e descriver da geografo, naturalista, e storico tutto ciò, che alla fisica costituzione delle africane ed asiatiche regioni, ai costumi, ai governi, ai religiosi sistemi, alle arti, alle scienze de' popoli si apparteneva, a tal segno che *nihil sibi praetermittendum omnino duxerit aut visu dignum, aut scitu, aut memoratu*: non è da dubitare, che nel girare almeno di sì bella curiosità sì vivamente acceso l'Egitto, veduto non abbia la *Biblioteca arabica de' filosofi* dall'anonimo egiziano, anni circa 50 prima, scritta, ed in essa la solenne asserzione, che quanti di algebra aveano scritto, tutti su i fondamenti del greco Diofanto eransi alzati; nè vi sarà chi non si senta quinci condotto ad inferire, che se il Cazuineo conosciuta l'avesse alla comune opinione e fama concorde, omesso non avrebbe in due parole di ripeterla, dicendo aver Moamad ben Musa Khuarezmita di tutti il primo insegnata ai maomettani l'arte dell'algebra da Diofanto derivata. Ecco un secondo argomento a disfavore di essa asserzione. Supponendo per fine, che il Casiri abbia con tutta fedeltà in questa espressione *princeps omnium algebrae artem mahometanis tradidit*, latinamente voltata la lode dal Cazuineo a Moamad ben Musa Khuarezmita tributata, non resta però ben definito di tal lode il senso, ed il valore. Si può restrignerla al senso di primo maestro a' maomettani di arte altronde tratta, senza però che tratta intendasi da Diofanto; e non disconviene punto all'espressione il darle il senso di una lode più alta, e più onorevole, qual è quella d'inventore. La particolarità della parola *mahometanis* significa, che Cazuineo avea in vista altra gente prima della maomettana nell'algebra instrutta; ma non nega, che, siccome uno di quella gente in mezzo ad essa, così il Khuarezmita matematico tra la maomettana abbia avuto l'ingegno d'inventar l'algebra.

§. IV. Dagli stranieri vengasi agli scrittori nostri, e primamente a Leonardo Pisano. Dichiara egli nella prefazione alla testa del primo lavoro del suo abaco, e nella dedicatoria previa alla riforma di esso, che prende ad insegnare la piena scienza de' numeri giusta il *modo* degl'indiani, e di questa piena scienza de' numeri giusta l'indiano *modo* fa membro il *modo* di algebra, ed almucabala, non assegnandogli che parte dell'ultimo capitolo del libro, senza la menoma aria di cosa di origine singolare, ed all'indiana aritmetica estranea, senza un cenno d'inventore diverso. Vero, che in uno de' codici, nel Riccardiano cioè, di fianco delle prime linee, nelle quali Leonardo entra a spiegare l'arte, trovasi in margine scritto *Maumeht*; ma non essendovi nel testo parola, che a sè leghi questo nome, apparisce manifestamente essere tal nota marginale un mero arbitrio del copista. Di ciò si ha una bella irrefragabil conferma dal Canacci, il quale, proposta la quistione, che sin d'allora agitossi dell'inventore dell'algebra, e dopo il vago dire di Guglielmo di Lunis, e di altri, che ella *fosse stata composta da un maestro arabo di grande intelligenza*, addotto il determinato parere di alcuni a favore di Geber, li confuta avvertendo non esser algebra un nome dal nome dell'inventor derivato, ma per autorità di Leonardo un nome espressivo di una delle operazioni dell'arte. Dopo di che si arresta il Canacci, lasciando dell'inventore dell'algebra ignoto il nome, e indecisa la quistione, ciò che non avrebbe fatto, se nel testo di Leonardo stato vi fosse *Maumeht*.

§. V. Viene in conferma Fra Luca, il quale con diurna mano, e con notturna versò l'abaco di Leonardo, e tanto per il suo volume ne prese: in tutta però l'ampia mole di esso non nomina una volta Muhamed, nè qualsiasi altro individuo per inventore dell'algebra. Anzi non ha luogo, nel quale di proposito parli egli della origine della medesima, ma soltanto per incidenza alla pag. 67, in descrivere i gradi algebraici, dice indeterminatamente gli arabi dell'algebra primi inventori.

§. VI. Non così il Cardano, nelle cui varie opere ben quattro passi si ritrovano l'origine dell'algebra risguardanti. Il primo si offre nel libro II *De consolatione*, tomo I *Oper.* pag. 598, dove a provare non essere delle temperate regioni sol proprio l'acume della mente, e lunga mano ingannarsi coloro, che si fingono alle belve, e pella mostruosa forma del corpo, e per l'ottusità dell'intelletto simili agli abitatori degli estremi lidi della terra, arreca, che *Leonardus Pisanus dum in Indiam et Aethiopiam penetrasset, ex India arithmeticam qua nunc utimur, ex Aethiopia algebrae artem supputandi (argumenta clarissimorum ingeniorum) detulit.* Da questo discorso di Cardano inferir si dovrebbe, non meno che d'indiano ingegno l'aritmetica, esser di etiopico ingegno glorioso parto l'algebra. Ma, oltre che immaginario si è il penetrar di Leonardo all'India, ed all'Etiopia, non facendone egli menzione nel novero de' suoi viaggi, siccome ho avvertito nella storia dell'aritmetica, l'attribuire ad etiopico ingegno l'invenzione dell'algebra non concorda con ciò, che Cardano stesso dice nel libro XVI.° *De subtilitate* tomo III *Oper.* pag. 607, assegnando l'ottavo posto tra i dodici più sottili ingegni del mondo, a Maometto figlio di Mosè, arabo, dell'algebra, a così dire, inventore, dal nome perciò della quale cognome acquistò: *Mahometus Mosis filius arabs algebraticae, ut dicam artis inventor..... ob id inventum ab artis nomine cognomen adeptus est.* E qual cognome? Altro non può esser che quello di Giaber, o Geber; e così intese Wallis: *Cardanus Mahometi ben Musa algebrae inventionem adscribit, eumque ob hanc artem Gebrum fuis-*

se dictum putat. Ecco un errore rovescio di quello già due secoli prima confutato dal Canacci, credendosi malamente allora da alcuni, che dal nome dell'inventore fosse stata tirata la denominazione *Algebra*, ed inventor perciò deducendosi Giaber o Geber; stimando per l'opposto il Cardano, che il nome dell'algebra aggiunto avesse al suo inventore il cognome di Giaber, o Geber. Ma Geber, o Giaber è un famoso astronomo di Siviglia, benemerito singolarmente di bei teoremi nella trigonometría sferica, il quale nulla ha che fare con il Moamad ben Musa, di cui si tratta. L'ascriver poi ad un arabo l'invenzion dell'algebra, e il farla parto di etiopico ingegno, sono cose tanto fra lor discordi, quanto sono differenti l'Arabia paese dell'Asia, e l'Etiopia paese interno dell'Africa. Il Casiri dopo aver su la testimonianza del Cazuineo affermato: *Omnium princeps algebrae artem mahometanis tradidit Mohamad ben Musa Khuarezmita*; prosegue: *Mathematicus vel apud latinos celeberrimus, cujus meminit Cardanus* De subtilitate lib. XIV (XVI) *eum algebrae instauratorem appellans, atque inter subtilia duodecim orbis ingenia numerans octavum*. Io son dell'avviso del Casiri, che il Moamad ben Musa, di cui in Italia erasi alzato grido, celebrandolo qual inventore dell'algebra, fosse il Khuarezmita; e penso io, che il crederlo arabo provenisse dall' aver esso in arabo scritto il suo libro di algebra, siccome eziandío altre sue opere, collocandolo appunto il Casiri tra i matematici, che arabicamente scrissero. Quanto più la Corasmia, all'oriente del mar Caspio situata, discostasi, che non l'Arabia, dall'Etiopia, tanto più si allontana dal vero, che un etiope sia stato dell'algebra creatore. Non si arrischia Cardano nel citato luogo di dire Moamad ben Musa in assoluto e pieno senso inventor dell'algebra, ma in senso solamente modificato, e ristretto *ut ita dicam*. E che intese dire il Cardano? Il Casíri interpreta *instaurator*. Sebben, che cercar ciò, se Cardano stesso nel terzo luogo, che già mi si presenta, cioè nella prima linea dell'*Arte magna*, lasciata ogni modificazione, senza verun restrignimento, in senso assoluto e pienissimo pronunzia: *Haec ars olim a Mahometo Mosis arabis filio initium sumpsit?* Ecco l'origine propiamente dell'arte a Moamad ben Musa per Cardano attribuita: niente esser vi può di più chiaro. Ed affinchè non se ne dubiti, presenta il Cardano il testimonio, *etenim hujus rei locuples testis Leonardus Pisanus*. Il fatto però sta, che Leonardo, lungi dall'essere *locuples testis*, non n'è punto, non nominando per alcun modo Maometto, come nel §. IV. ho dimostrato. Che direm noi dunque, fuorchè non aver Cardano letto il libro di Leonardo, ed esser forse stato ingannato dalla voce senza discernimento sparsa di quella marginal nota *Maumeht*, della quale nello stesso §. IV ho fatto vedere l'arbitraria apponizione? Vero è, che Cardano tostamente soggiugne: *Reliquit autem Leonardus capitula quatuor cum suis demonstrationibus, quas nos suis locis adscribemus*: dalle quali ultime parole sembra, che avesse Cardano il libro di Leonardo tra le mani. Ma l'argomento non è certo: senza aver tra le mani il libro di Leonardo, non avea Cardano tra le mani le dimostrazioni di lui nel volume di Frate Luca? Nè ciò, che Cardano dice di quattro soli *Capitoli* da Leonardo trattati, e lasciatici, è giustamente detto secondo Leonardo, il quale sei ne distinse, e dovea distinguerne, scelto per fonte delle distinzioni il sistema di combinazione, siccome nel Capo I, §. X fu per me dichiarato: ottien soltanto giustezza secondo Cardano medesimo, il quale sotto l'idea di *Capitolo* semplice unisce tutte insieme le equazioni di due termini, associando alla forma di quelle di primo grado le forme delle pure di qualunque grado si sieno; e in tre *Capitoli* lascia distinti i tre antichi casi delle equazioni affette di secondo grado. E falso è poi, che Leonardo di geometriche dimostrazioni corredato abbia ciascun dei *Capitoli* da lui sciolti, non avendo stimato di geometrica dimostrazion bisognosi i tre suoi *Capitoli* semplici: onde la dimostrazione, che rispetto ad essi reca Cardano nel capo IIII, non potea dirla da Leonardo trascritta. Ecco accumularsi gl'indizj del non aver Cardano propiamente letto il libro di Leonardo. Ma che più, se ciò immediatamente ricavasi da quello, che egli medesimo scrive alla pag. 118 del tomo X delle sue opere nel cap. II del libro *De mathematicis quaesitis*, il IX tra i Paralipomeni? È quivi stesso, dove per la quarta volta, a mia notizia, parla egli dell'invenzion dell'algebra. Si presti per l'ultima fiata a lui ascolto. Dopo avere enumerati varj autori di aritmetica, prosegue: *Fuit et Mahomet Moisis filius (sic enim inveni) qui celebratam artem, quam vulgo Algebrae vocant, in Arabia condidit, non totam, sed quatuor tantum ejus prima capita. Posterior eo fuit Boetius quanquam illam non vidisse, aut intellexisse putandum est. Antiquior eo fuit Alchindus, quem Averroes satis novisse mihi videtur, cujus opusculum quidam tam impudenter, quam etiam inepte scriptis suis, ut ingeniosi viderentur inseruerunt. Inter latinos proximus a Boetio Leonardus Pisauriensis erit, et, si ad artem respicimus, etiam melior; hujus opus in bibliotheca beati Antonii Venetiis eraso titulo vidimus conditum jam diu ante Fratrem Lucam: verum non ab illo aut magnitudine, aut ordine, vel rebus ipsis plurimum differens, utque suspicari liceat (quod et Frater Lucas fatetur ex parte), totam, quae usque ad nostra tem-*

pora, praeter graecorum inventum, defluxit, numerandi peritiam, Leonardo, qui ex India Arabia eam detulit, tribui debere. Quante, oltre le principali, incidenti riflessioni qui da me richieggon le cose da Cardano in questo luogo affastellate! Mi studierò tuttavía di spedirmene prestamente. Già da ciò, che poco fa rispetto a Leonardo ho notato, apparisce in qual senso intender si debba da Cardano scritto aver Moamad figlio di Mosè inventato i soli primi quattro *Capitoli* dell'arte algebraica; e aggiugne, non l'arte tutta, riferendo ai *Capitoli* cubici, de' quali per Scipione Ferreo, per Tartaglia, e per lui fu accresciuta. Grosso errore è il fare Boezio, che morì sventurato nel 526, posteriore a Moamad ben Musa vissuto sotto Almamone nel secolo IX. Par egli questo un error fratello di quello di Frate Luca a pag. 67, dove dice, che *Boezio exponendo Euclide fa molto menzione di Thebit maxime nel quinto*, e in vece di Thebit è Archita, che Boezio cita e loda. Ed errore è pure, che Alchindo sia di Moamad ben Musa più antico; poichè laddove di questo per le narrazioni dell'anonimo egiziano, e di Abulfaragio è certo, che fiorì nel regno di Almamone, il quale cominciò l'anno 814, ed ebbe termine l'anno 831, di quello non parla Abulfaragio che all'anno dell'egira 279, al quale corrisponde l'anno di nostra era 892. Di Alchindo due opere ad algebra appartenenti registransi nella *Biblioteca arabica de' filosofi*. *De numeris abditis extrahendis*. — *De quantitate relativa*, — sul qual titolo vien notato: *quam arabes posterioris aevi algebram vocitarunt*. Io non so se sia alcuno di questi due l'opuscolo, del quale certuni, al dir di Cardano, volevano farsi belli inserendolo negli scritti loro. Dopo Boezio non vi fu, che si sappia, tra' latini veruno sino a Leonardo, che spargesse lume di aritmetica: in questo senso di non esservi stato alcuno tramezzo può dirsi Leonardo prossimo a Boezio, quantunque di tempo distante di circa sette secoli. Malamente Leonardo è da Cardano appellato *Pisauriensis*: a questa appellazione Leonardo si crederebbe di Pesaro, e non di Pisa. Racconta Cardano di aver veduto nella biblioteca del beato Antonio in Venezia un codice dell'opera di Leonardo, della quale però era abraso il titolo. Io non voglio cercar qual fosse quella biblioteca; mi basta osservare, che egli non vantasi di aver mai posseduto un codice di Leonardo, come nella pagina stessa gloriasi del possedimento di codici di altri scrittori aritmetici greci e latini. Presentatogli in quella biblioteca quel codice, lo avrà Cardano svolto, e scorso; ma, che non lo esaminasse attentamente, che non lo confrontasse a bell'agio con il volume di Fra Luca, ma che frettolosamente, e su due piedi il trascorresse, lo prova il giudizio, non esservi tra l'opera di Leonardo e quella di Frate Luca, nè nelle cose, nè nell'ordine molta differenza. Egli stesso il Cardano, procedendo poco dopo a parlar di Fra Luca, dice, che *nihil quod ad rem pertinere posse putaret praetermisit..... quae sparsa erant in unum redegit*. E il fatto è, che l'opera di Fra Luca supera quella di Leonardo in ricchezza; ma di gran lunga le va inferiore nell'ordine. Ciò che termina il recato passo del Cardano, che Leonardo vale dire *ex India Arabia numerandi peritiam detulit*, lo spieghi, e lo componga con gli altri detti di lui, con i fatti veri chi il può.

§. VII. In fronte alla sesta parte del general trattato de' numeri e misure di Niccolò Tartaglia, data in luce l'anno 1560, il terzo dopo la morte di lui, da Curzio Trojano leggesi questa dichiarazione: *nella quale si delucida* *quell'antica pratica speculativa de l'Arte magna detta in arabo Algebra, et Almucabala, ovver Regola della cosa trovata da Maumeth figliolo di Mosè arabo*. È a credere, che questo spiegamento, e il lungo frontespizio tutto sia opera del dotto matematico, al quale l'editore affidò la cura di unire, ed ordinare in continuo discorso i frammenti di algebra, che il Tartaglia lasciati avea. Ma le ultime parole, che sono quelle che ci importano, trovansi nel cap. 1I dal Tartaglia medesimo in una parentesi, inserite. Or l'enunciarsi in fronte, l'inserirsi tra parentesi, senza cenno di prove e testimonianze, son eglino modi di cosa giunta ad aversi per indubitata, ed esser già di comun consenso, e grido. A tale dunque salita era circa l'anno 1560 in Italia l'opinione, che Moamad ben Musa stato fosse dell'algebra l'inventore. Qual valor però accordar dovrassi a sì fatta italiana opinion di quel tempo? Io non amo che la verità, nè per essere italiana opinione corso sono ad estimarla più di quello che merita, o voglio dissimulare i riflessi, che possono diminuirne il peso. Considerando primamente la facilità del passaggio dall'idea di primo maestro di un'arte in una nazione all'idea d'inventore dell'arte stessa, ignorandosene più rimota origine, e coltura, nasce il dubbio, che alterazione soffrisse in Italia la prima fama ad onor di Moamad ben Musa da' maomettani paesi venuta. Secondamente l'incostanza di Cardano, contenutosi dapprima ad appellarlo dell'algebra, a *così dire*, inventore, avanzatosi poscia a pronunziarlo assolutamente tale, par che dimostri l'avvenimento dell'alterazione, e quasi ne segni il tempo. Si può temer per terzo, che l'autorità di Leonardo da Cardano falsamente citato testimonio di somma fede, irrefragabile dell'aver l'arte analitica ricevuto da Moamad ben Musa il nascimento suo, abbia portato questa opinione a quel grado di forza, e a quella concordia di celebramento da contarla qual fatto appieno deciso, ed universalmente noto.

§. VIII. Si è per me nel Capo I, §. v dal dire di Cardano rilevato, che girava in quel tempo per l'Italia in linguaggio familiare tradotto un libro di algebra di Moamad ben Musa, ed oltre il passo di Cardano ivi addotto già da sè concludentissimo, un altro recar ne potrei del Capo v medesimo dell'*Arte magna*, allorchè procedendo Cardano a sciogliere molte quistioni, le distingue così: *duas ex Mahumete, reliquas nostras*. Io non saprei indovinare quando l'opera di Moamad ben Musa sia stata portata in Italia, e dall'araba lingua tradotta: certamente dopo che Leonardo Pisano avea con il suo abaco nel 1202 sparso per l'Italia dell'algebra il primo lume, poichè altrimenti non avrebbe avuto il coraggio di vantarlo primo, come più a lungo nel Capo I, §. iv ho spiegato; mancami fondamento di più dire. Il non trovar del libro di Moamad ben Musa cenno alcuno presso Frate Luca parrebbe buona ragione per inferire, che introdotto siasi in Italia tra il tempo, in cui Frate Luca medesimo stampò il suo volume, ed il tempo, in cui Cardano diede alla luce la sua *Arte magna*, cioè tra l'anno 1494 ed il 1545. Ma presso Frate Luca menzion del pari veruna non trovasi della *Regola d'algebra*, che dall' araba in toscana lingua voltata da Guglielmo di Lunis fu, correndo il secolo xiv, tolta a spiegare da Raffaello Canacci. Sarebbe mai questa *Regola* stata l'operetta stessa di Moamad ben Musa? È da avvertirsi, che essa *Regola*, per quanto dal Canacci ricavar si può, era anonima, e che Guglielmo, il traduttore, scrivendo dell'inventor dell'algebra non assegnava individua persona, e solo indeterminatamente diceva essere stato un arabo maestro di grande intelligenza. Quinci a credere, che quella *Regola* fosse una cosa stessa, che il libro portante a' dì del Cardano in fronte il nome di Moamad ben Musa riguardato qual inventor dell' algebra, converrebbe immaginare, che dapprima fosse l'operetta di Moamad ben Musa penetrata nell'Italia anonima, e tale per qualche tempo rimasta fosse, poscia, venuto a cognizione l'autore, del nome di lui si fosse ornata. La combinazione non è impossibile; ma io mi asterrò dal dirla avvenuta. Riputandosi Moamad ben Musa dell'algebra l'inventore, necessaria conseguenza si era, che in pregio si tenesse il libro di lui. E perciò non è a stupire, che impresso a pubblico comodo il volume di Frate Luca, cadesse in abbandono il libro di Leonardo Pisano, benemerito di aver dall'Africa trasferita, e in Italia trapiantata l'algebraica dottrina, e fosse Moamad ben Musa ne' giorni di Cardano salito a goder tal rispetto, che Cardano medesimo temesse rimprovero per dipartirsi in una dimostrazione da lui. Credo cionulladimeno, che l'operetta di Moamad ben Musa sia sempre rimasta manoscritta, e priva della sorte della stampa, non meno che l'abaco di Leonardo. Non la trovo nominata nella compilazione dei frammenti di algebra di Tartaglia; ma Bombelli scrive, che vedeasi nel 1572. L'arricchimento dell'algebra per le scoperte di Scipione Ferreo, di Tartaglia, di Cardano, di Lodovico Ferrari solennemente da Cardano stesso dispiegato, consegnando alle stampe l'*Arte magna*, dovea recarle danno. La nuova luce ed ampiezza dell'algebra ebbe sicuramente parte in far pronunziare al Bombelli, che l'operetta di Moamad era di picciol valore. Questa sentenza, e l'opera medesima del Bombelli, nella quale l'algebra comparì finamente adorna dei diofantei artifizj furono per quella nuovi colpi funesti. Forse è perita in Italia, o giace in qualche biblioteca ignota e inosservata. Gode ora miglior sorte l'abaco di Leonardo, del quale si serbano, e mostrano parecchj codici.

§. IX. Non solo ebbe Bombelli il coraggio di sentenziare di picciol valore l'operetta di Moamad ben Musa, ma contro l'opinione eziandio in Italia invalsa di togliere a lui, anzi agli arabi universalmente la gloria della invenzion dell'algebra, dicendo, che prima di loro posseduta l'aveano gl'indiani. In alta però maraviglia, o piuttosto in un inestricabil mistero s'involge mia mente in considerare ciò, che a fondamento egli scrive di questo suo parere. Quel Bombelli, che al reggiano Pazzi associato cotanto affar si prese di Diofanto, che cinque dei sette libri nel Vaticano codice ritrovati ne tradusse, ed avendo sorte ad ambi nemica, con obbligarli forse a partire di Roma, impedito il compimento del lavoro, si appigliò al partito di versar nella sua opera di algebra il tesoro di quei cinque libri diofantei: che a Bacheto, per ingenua confession di questo stesso, servì di lume a penetrar la mente di Diofanto, e racconciarne il testo: Bombelli in persona sua, ed in quella del socio scrive: *Abbiamo trovato, che Diofante assai volte cita gli indiani; con che mi ha fatto conoscere, che questa disciplina appo gl'indiani prima fu che agli arabi.* Chi a lui non si abbandonerebbe, la fede prestandogli più cieca? Franco tuttavia si levò contro l'asserzione di lui Bacheto, negandogli, che Diofanto pur una volta citi gl'indiani, e rinfacciandogli di aver confuso con il testo di Diofanto le *insulse e putide* annotazioni dello scoliasta (Planude), il quale alla definizion IX un avvertimento inserisce sul modo di moltiplicare indiano inverso nell'ordine del greco. Non è questo un parlar degl'indiani, che abbia relazione alcuna con l'algebra, tanto è lungi, che tal sia, dal quale inferir si debba, o si possa aver presso di loro prima che presso gli arabi tenuto l'algebra soggiorno; non è degl'indiani parlar assai volte; non è il parlar di Diofanto. Nè può sospettarsi, che il codice Vaticano di Diofanto da Bombelli letto e meditato fosse dal volume che noi abbiamo alle stampe diverso, sicchè si trovassero in quello citati assai volte gl'indiani, quantunque in questo non trovinsi. Il dottissimo abate Marini nelle sue gentilissime risposte alle mie interrogazioni tra i parecchj codici di Diofanto, che nella Vaticana esistono, distingue, quale da Bombelli veduto, il notato del num. 200, e non una fiata in esso, nel testo di Diofanto, il nome d'indiani; in niuno parimente degli altri; nè nelle brevi dilucidazioni anonime scritte in margine del codice sotto il num. 191. E vero è, che in quel Vaticano codice da Bombelli rivoltato mancava dello Scoliasta il nome; ma senza ridire della distanza tra la sottile ed alta indole del testo, e la per lo più frivola ed umile degli scolj; non costrignea a distinguere da Diofanto lo Scoliasta il parlar, che fa questi in persona diversa? Le parole prime dello scolio stesso alla definizione IX apposto, sono, al tradur di Xilandro, *defectum vocat*. Così lo Scoliasta: e chi è, che *vocat*? Diofanto. Non vi ha dunque per parte veruna scusa la più menoma. E non è rispetto a Diofanto solo, che erri stranamente Bombelli, ma rispetto eziandio a Frate Luca grave error commette affermando da lui scriversi, che la voce *Algebra araba, è quale in lingua nostra* posizione, *e che da arabi la scienza è venuta*. Di vero Frate Luca non scrive solo esser la scienza algebraica dagli arabi a noi venuta, ma espressamente essere stata da loro inventata:

questo però è il meno. E dove trovò Bombelli da Frate Luca detto, che la voce *algebra* in arabo è quale in lingua nostra *posizione? Algebra vol dire restauratione, Almucabala vol dire opposizione*. Sono le rotonde parole di Frate Luca alla pag. 148, costantemente ripetute in cento altri luoghi e cento, siccome a lungo nel Capo II fu da me dimostrato. Or come errar tanto in un Bombelli! Il dissi io già esser questo al mio intelletto un paradosso, del qual non vale a dissipar la maraviglia quel *quandoque bonus dormitat Homerus*, volendovi altro che un dormicchiare per togliere sì fattamente ad un Bombelli la vista, e il senno.

§. X. L'idea, che dagl'indiani abbiano gli arabi ricevuta l'arte algebraica, piacque al Wallis, il quale non citando Bombelli parrebbe, che da sè conceputa l'avesse, se non constasse, che fece egli sua altra cosa miglior del Bombelli, come gli rinfaccia alla pag. 487 del tomo I il Montucla. Vero però si è, che se da Bombelli pur prese Wallis motivo a concepire, non potè prendere il fondamento del concetto, e tutto nuovo dovette da sè costruirlo, e lo costrusse. E siccome primieramente, sparsa mercè le cure del Bombelli, del Xilandro, del Bacheto per l'Italia, per l'Alemagna, per la Francia, e per le altre parti dell'Europa la cognizione dell'analisi di Diofanto, acceso di essa lo studio, montato Diofanto stesso in alto grido, si destò il parere di dargli l'onore, che l'opera sua stata fosse dell'algebra araba la fonte; così dall'apporre a questo parere due considerazioni incomincia Wallis il suo ragionamento. La prima considerazione cade sul nome *Algebra*, nome puramente arabo, e niuna affinità avente con il greco linguaggio; la qual affinità però ne' nomi *affectare* (scrive Wallis) *arabes videbantur in iis quae a graecis acceperunt: ut liquet in vocibus*

Almagesti, Algorismus aliisque, quae a μεγιστη et αριθμος descendisse non dubitem. Ma a dir vero pochi esempj non bastano; e quanto il numero è più lontano dal mostrare una regola costante, un generale costume, tanto l'argomento è più debole. E l'esempio poi di *Algorismo* sembra fuor di proposito, e provante troppo, essendo certo, e riconoscendolo Wallis, che gli arabi non da' greci, ma dagl'indiani ricevettero i numeri, il sistema di enumerazione, la dottrina delle aritmetiche operazioni appellata *Algorismo*. Più valida è l'altra considerazione, la quale riguarda il diverso tenore di Diofanto e degli arabi nel formare la scala dei gradi, o delle dignità, e nel comporne i nomi conseguentemente. Il tenor di Diofanto è stato già da me esposto sul fine del §. vII del Capo IV, e si può chiamare Metodo di Moltiplicazione, poichè ogni grado superiore si considera come prodotto dalla moltiplica di due inferiori, scielti i due più prossimi fra loro, allorchè varj binarj possono produrlo, siccome ivi castigando il Montucla ho avvertito, e spiegato. Il tenor degli arabi seguíto dagli analisti nostri primitivi si può appellare Metodo di Elevazione, formandosi per elevazione a quadrato o cubo tutti quei gradi, che possono di tal guisa essere generati: ma perchè vi sono molti gradi, che non ammettono tal generazione, come l'x^5, l'x^7, l'x^{11} ...; perciò all'ordine dei gradi per elevazion generati fu mestieri interporre un altro ordine di gradi altrimenti generati, cioè dalla moltiplica di quelli nel lato x, ad esempio x^5 da $x^4 \times x$, x^7 da $x^6 \times x$, e così va discorrendo. Questi gradi hanno presso Fra Luca, Cardano, Tartaglia il nome di *Relati*. Wallis scrive *supersolidorum (ut jam loquimur) denominationes interseruntur*: giusta questa nuova denominazione Montucla li chiama francesamente *sursolides*. Trovo nella *Biblioteca arabica de' filosofi* dal più volte commendato Moamad AlBuziani composto un libro *De gradibus arithmeticis in tabulas distributis*, con la lode *liber sane praeclarus*: sarà stato simile a quelli, che per la pratica dell'algebra raccomanda di aver tra le mani Fra Luca alla pag. 143, li quali, oltre la scala dei gradi, contenevano le tavole delle moltipliche, e divisioni fra loro, e de' quali dà ivi Fra Luca un saggio distendendo la tavola delle moltipliche di 30 gradi, ciascuno per gli altri tutti: la novità forse, o l'ampiezza sarà stata la cagione di ornar il libro di Moamad AlBuziani del titolo di preclaro. In esso pertanto veder si potrebbe quali erano presso gli arabi i nomi dei gradi, sì di quelli per elevazion generati, sì degli altri loro interposti. Che sia però nato in Italia il nome di *Relato*, non altrimenti che quello di *Censo*, siccome alla pag. 67 dice Fra Luca, nulla importa, bastando sapere arabo essere il sistema della scala, il tenor della formazione di essa. Se non piacesse il distinguerlo con il titolo di Metodo di Elevazione, considerandone solo la parte principale, si può chiamare la scala diofantea Scala uniforme di Moltiplica di due gradi inferiori, li meno tra lor disuguali; e la scala araba Scala mista di Elevazione a quadrato o cubo, e di Moltiplica di un quadrato o cubo con la radice. Ma ciò, a che principalmente si dèe por mente, si è l'effetto delle differenze dei due metodi; e a dimostrare quale, e quanto sia basteranno due esempj. Si osservi pertanto, che x^5, che nella scala diofantea è quadrato-cubo, nella scala araba è relato 1.°, e che x^6, che nella scala diofantea è cubo-cubo, nella scala araba è quadrato di cubo, ovvero cubo di quadrato: sono queste solenni differenze, e maggiori si fanno nei gradi più alti; poichè, per esempio, x^{24} nella scala diofantea non ha che una generazione, cioè $x^{12} \times x^{12}$, e nell'arabo ne ha tre: $(x^2)^2)^2)^3$, $(x^2)^2)^3)^2$, $(x^3)^2)^2)^2$. Ho sin qui illustrato la considerazion del Wallis su le scale di Diofanto e degli arabi; ma egli non ha riflettuto a due altre differenze tra le scale medesime. La prima si è, che laddove Diofanto denomina con singolarità *Numero* il numero ignoto, denominando *Monade* il numero dato di comparazione; gli antichi italiani degli arabi seguaci denominano questo il *Numero*; e *Radice*, o *Lato*, o *Cosa* il numero sconosciuto. La seconda è, che Diofanto comincia la scala dal numero ignoto; e Fra Luca, Tartaglia, Cardano la incominciano dal numero noto. Ecco le due scale di rincontro, onde meglio risaltino all'occhio le differenze loro.

SCALA ESPONENZ. ODIER.	SCALA DIOFANTEA *con nomi greci tradotti.* *Gradi*	SCALA ARABA *con nomi italiani antichi.* *Gradi*
	. . . .	1.° Numero .... il Noto.
x	1.° Numero ... l'Ignoto	2.° Cosa, Radice, Lato.
x^2	2.° Podestà	3.° Censo.
x^3	3.° Cubo	4.° Cubo.
x^4	4.° Podestà-Podestà	5.° Censo di Censo.
x^5	5.° Podestà-Cubo	6.° Relato 1.°
x^6	6.° Cubo-Cubo	7.° Censo di Cubo, o Cubo di Censo.
x^7	. . . .	8.° Relato 2.°
x^8	. . . .	9.° Censo di Censo di Censo.
x^9	. . . .	10.° Cubo di Cubo.
x^{10}	. . . .	11.° Censo di Relato 1.°
x^{11}	. . . .	12.° Relato 3.°
x^{12}	. . . .	13.° Cubo di Censo di Censo, o Censo di Censo di Cubo, o Censo di Cubo di Censo.
x^{13}	. . . .	14.° Relato 4.°
x^{14}	. . . .	15.° Censo di Relato 2.°
x^{15}	. . . .	16.° Cubo di Relato 1.°
	Diofanto non procede oltre il sesto suo grado.	Frate Luca prosegue sino al grado 30°; ma bastano li 16 trascritti a far comprendere l'andamento all'infinito.

Delle sue considerazioni dice Wallis di stimarle *argumenta non contemnenda*, che gli arabi non abbiano da Diofanto appresa l'algebra; onde si dichiara portato a pensar piuttosto o che l'abbiano eglino da loro inventata, o che da altra gente che dalla greca l'abbiano ricevuta: *potius puta-*

verim arabas sive ipsos invenisse, sive ab aliis quam a graecis algebram suam accepisse, jam ante Diophanti tempora. E tra questi due pareri il secondo è quello, al quale si manifesta più propenso, assegnando eziandio la regione, onde crede l'algebra uscita, e sino nell'Arabia diffusa, cioè l'India. Il riflesso, su cui si fonda, è, che di colà ricevettero gli arabi le numerali figure, ed il più bel metodo di variarne il valore, e di usarle ad ogni sorta di conteggio, con che non è improbabile, che dagl'indiani medesimi abbiano apparato profonde specolazioni intorno ai numeri, e possano aver ricevuta l'algebra ancora: *Haud improbabile est arabas qui ab indis figuras numerales acceperint (graecis ignotas) simul inde didicisse tum earum usus, tum profundas de illis speculationes, quas neque latini, neque etiam graeci prius noverint, quam ab arabibus tandem fuerint edocti. Ab indis iisdem etiam accepisse potuerint algebram suam, potius quam a Diophanto (qui solus graecorum, quantum scimus, de ea scripsit) idque sero, et in methodo multum diversa ab ea, quae est arabum.* A sentire il peso del raziocinio di Wallis bisogna ricordarsi, che appresso gli arabi l'algebra esercitavasi in numeri, e non era che una parte di aritmetica. Nè mi sarà imputato a delitto, se per mettere il raziocinio in tutta la sua giusta forza, e per meglio seguire la verità mi sono fatto lecito di discostarmi alcun poco dal testo di Wallis, trasferendo dal numero delle non improbabili illazioni nella premessa, qual cosa già certa, che in un con le numerali figure abbiano gli arabi dagl'indiani ricevuto l'uso loro ancora, essendo questa una cosa di fatto dimostratissimo e indubitato, come dalla mia *Storia dell'Aritmetica* manifestasi. Sebben poi creda Wallis, che dagl'indiani siasi agli arabi trasfusa l'algebra, non crede però, che da quelli a questi trasfusa si sia immediatamente; ma che per le mani de' persiani passata sia. *Quod apud arabas olim in usu fuerit algebra haud minus certum (citius fortasse quam apud graecos a Diophanto tradita) quam eos accepisse credibile est, non tam a graecis, quam a persis, et hos ab indis.* Moamad ben Musa AlChuarezmita, che il primo di tutti per fede del Cazuineo insegnò ai maomettani l'algebra, non fu propiamente di Persia, ma di provincia vicina. Ciò che, con il dir del Cazuineo, non si può per verun modo accordare, anzi diametralmente ad esso ripugna, si è, che *jam ante Diophantum* sieno stati gli arabi nell'algebra scienziati, e che *profundas de numeris speculationes neque graeci prius noverint, quam ab arabibus tandem fuerint edocti*. Di molti secoli Diofanto precorse a Moamad ben Musa AlChuarezmita, il quale non fiorì che al secolo IX: onde di lui in confronto dell'autor greco con ragion si può dire, che *sero* trattò l'algebra, non a rovescio. Wallis però medesimo, che nei due luoghi, dei quali ho qui ripetuto le parole, sembra, che franco getti il suo pensiero, dubitoso il propone con un *fortasse* nell'ultimo luogo recato, e così in un altro. Ben diversamente dal Wallis sentì degli arabi il Brukero, scrivendo: *nihil arabos graecorum observationibus adjecisse, in multis eos vehementer depravasse*. Al Brukero si fa incontro nel tomo I, capo VIII, pag. 147, il chiarissimo abate Andres, e dopo avergli opposti alcuni altri sapienti uomini, che non così, com'egli, degli arabi opinarono; *non così* (prosegue) *il dotto Wallis, il quale agli arabi attribuisce l'invenzione dell'algebra, e li rende padroni assoluti e proprietarj di un bene, che altri solamente lor davano in prestito, o che credevano forse da loro a' greci involato*. Ancorchè però, lungi il Wallis dall'aggiudicare agli arabi decisamente la gloria di aver da loro stessi inventata l'algebra, si manifesti assai inclinato a credere, che dagl'indiani per mezzo dei persi l'abbiano ricevuta; tuttavía non meritan eglino i rimproveri del Brukero, avendo recate a maggior lume e perfezione alcune cose greche, massimamente di quelle alla trigonometría, ed all'astronomía appartenenti.

§. XI. Se dall'aver Cardano citato Leonardo Pisano *locupletem testem* del nascimento dell'algebra dall'ingegno di Moamad ben Musa io inferii, che Cardano non avea letto di Leonardo il libro; debbo ora, in procedere a Montucla, dall'aver lui ignorata cotal citazione inferire, che non furon per esso lette le prime linee dell'*Arte magna* di Cardano. *Mohammed* (scrive egli nella parte II, lib. I, art. IX) *Mohammed-ben-Musa est donné par Cardan pour l'inventeur de la résolution des équations du second dégré: j'ignore sur quel fondement.* Avrebbe potuto ignorare Montucla il fondamento, su cui Cardano fondava l'onore a Moamad ben Musa attribuito, se avesse presa in mano l'*Arte magna* di lui? E sebben falso falsissimo tal fondamento, sarebbe stato della maggiore autorità e forza per Montucla, che non avendo veduto, nè cercato lumi sopra il codice di Leonardo, non avrebbe potuto riconoscerlo falso. Tratto tratto occorreranno ne' seguenti Capi palpabili conferme, che Montucla non ebbe la cura di svolgere l'*Arte magna* di Cardano, libro per la storia dell'analisi della precipua importanza. Bello è ciò, che Montucla immediatamente soggiugne: *la découverte n'est pas assez difficile pour lui* (*à Mohammed-ben-Musa*) *faire beaucoup d'honneur.* Ma per esser equo verso l'inventore della risoluzion delle equazioni di secondo grado, chiunque si fosse, dovea Montucla ricordarsi del rifleso da lui stesso fatto a favor di Diofanto, così nella parte I, lib. v, art. vI, ammonendo: *Il seroit injuste d'attendre que l'algebre ancienne se fut élevée au même point que la nôtre. Mais l'ouvrage de Diophante nous apprend, qu'elle s'éleva du moins jusqu'aux équations du second dégré*, con il resto da me recato Capo IV, §. vII, pag. 73. E non è poi un intero riferir, ma scemo lo scrivere, che per Cardano Moamad ben Musa fu l'inventor della risoluzione delle equazioni del secondo grado; quasi che stata vi fosse già la risoluzione delle equazioni di grado primo, l'industria del porre il problema in equazione, o in equazioni, la sagacità di passare nel secondo caso ad una sola, la perizia di ridur questa con ogni sorta di trasposizione, e con l'elevamento delle irrazionali quantità, alla più semplice forma: in una parola il fondo tutto dell'arte analitica. Cardano dice nel terzo dei quattro suoi passi da me recati, che da Moamad ben Musa trasse l'*Arte magna* il suo principio, *initium sumpsit*, riguardando come principio di essa arte tutto ciò, che spetta lo scioglimento dei problemi di primo e secondo grado, in confronto della estensione, alla quale fu la medesima recata con l'aggiunta dell' analisi delle equazioni derivative di secondo, e di quelle di terzo, ed eziandio di quarto: estensione che tutta egli imprende a percorrere nel libro suo. E più espressamente nel quarto passo afferma, che Moamad ben Musa fabbricò la celebrata arte d'algebra, *celebratam algebrae artem condidit*, e sciolse i quattro di lei *capitoli* primi, *prima quatuor capita*. Non è pertanto attribuire a Moamad ben Musa tutto ciò che Cardano gli attribuisce, anzi togliergli molto, il circoscrivere l'invenzione di lui allo scioglimento delle equazioni di secondo grado, essendo assai più facile l'arricchire un'arte di un ritrovato, che concepirne la prima idea, e crearla a così dire. E non sarebbe certamente piccolo, ma onor anzi grande, e preclaro per Moamad ben Musa, se con sicurezza pronunziar si potesse aver lui gettati dell'arte algebraica i fondamenti, costrutte le regole, ed essersi sino allo scioglimento delle equazioni di secondo grado elevato. Ma vediamo quale rispetto all'origine dell'algebra fra l'araba gente sia stato di Montucla l'opinare. Incomincia col proporre un riflesso, che potrebbe a parer di lui condurre a pensare non esser gli arabi stati punto gli inventori dell'algebra, ma averla essi dai greci ricevuta, ed è il vantar l'algebra fra gli arabi un'antichità non di molto minore che le altre parti della matematica, le quali tenevano dai greci. *L'algebre n'est guère moins ancienne chez les arabes, que les autres parties des mathématiques, qu'ils tenoient des grecs. Cela pourroit donner lieu de penser qu'ils n'en sont pas les inventeurs, mais qu'ils la doivent aussi à ces derniers.* Vuol dire Montucla, che trovandosi l'algebra presso gli arabi di non molto alle altre parti della matematica da' greci, dic'egli indistintamente, ricevute posteriore, non ebber tempo d'inventarla, onde vi ha ragion d'inferire, che dai greci abbianla similmente ricevuta. Avanti di esaminar la conseguenza debbo io rischiarar la premessa, svolgerla nelle sue parti, segnare più esattamente i tempi, ridurla insomma a sensi più determinati, e più veri. Abu Giafar detto *Al-Mansor* (*il Vittorioso*) il XXI nella succession de' Califfi, salito a tal dignità l'anno 754, prestante nella dottrina delle leggi, fu quegli, che nei tranquilli ozj, frutti de' suoi trionfi, dedicandosi egli stesso alla filosofia, e precipuamente all'astronomia, diede loro fra gli arabi moto e vita, di modo che gli eruditissimi monaci autori della grand'opera *Art* *de vérifier les dates*, non dubitan di scrivere, che *la philosophie et l'astronomie fleurirent chez les arabes sous son regne*. Questo fiore però non fu che un principio di quello, a cui le lettere, le arti, le scienze crebbero sotto gli auspicj di Haroun AlRaschid, montato a Califfo XXIV l'anno 786. Di lui dicon gli stessi monaci, che protettore delle lettere arricchì gli arabi di tutte le dovizie letterarie de' greci, facendo tradurre le opere loro migliori: *Protecteur des lettres, il fit passer chez les arabes toutes les richesses littéraires des grecs par les traductions qu'il fit faire de leurs meilleurs ouvrages*. L'anonimo egiziano nella *Biblioteca arabica de' filosofi* in parlare di Euclide colloca tra le versioni arabe degli *Elementi* in primo luogo una versione chiamata *Haronea*, perchè a comando di Haroun eseguíta da Hegiago ben Joseph. Non parla di questa version sotto Haroun, nè di Hegiago il francese storico delle matematiche. Hegiago rivide, e riformò la sua versione per ordine di Mamone, dal cui nome la version novella fu appellata *Mamonea*. Mamone, o come più comunemente, premesso l'arabo articolo, si suole scrivere Almamône Califfo XXVI, il cui regno cominciò l'anno 813, quanto di Almansor, e di Haroun più ornato di filosofici lumi, tanto fu più fervoroso a promovere tra la gente sua, e per le vaste sue provincie più largo stendere il bello felice giorno delle scienze. Bailly nel tomo I dell'*Astronomia moderna*, libro VI, §. VIII, pone tra lui, ed il padre Haroun questa differenza: che egli amò, e coltivò le scienze, le quali Haroun contentato erasi di proteggere. *Il aima, et cultiva les sciences qu'Haroun s'étoit contenté de proteger*. Ma non così l'Herbelot, il quale all' articolo *Haroun*: *Ce Kalife* (dice) *aimoit fort les gens de lettres, et cultivoit lui-même les sciences*. Quello che si può con verità dire, si è, che Almamone possedeva le scienze ad un grado di gran lunga più alto che Haroun. Dell' amore, e della liberalità di questo verso la gente di lettere vuole Herbelot, che si riconosca uno splendido atto nella compera della sapiente schiava Taovadod Khatoun per il prezzo di zecchini venti mila. A questo generoso atto contrapporre si può la somma di monete d'argento ben cinquanta mila da Almamon regalata al grammatico Nadr, solamente per averlo con destra ingenuità corretto dell'errore in pronunziare *Sadad* invece di *Sedad*, ed avergliene spiegate le diverse significazioni. La differenza, che diligentemente considerando e raccogliendo i racconti degli arabi storici si ricava tra Haroun ed Almamone, si è, che Haroun amò, e protesse le amene lettere, le arti, le scienze morali, la medicina, più che le matematiche; Almamone a queste intese il suo ingegno, il cuor suo, il suo zelo. Prova di questo zelo di singolar memoria degna si è la filosofica condizione, senza esempio nelle storie, che, accordando pace, imponeva ai greci re di spedirgli invece di un tesoro di fulgido metallo, sete de' guerreggiatori avari, gli scritti, che avean migliori, de' greci filosofi, nella Grecia già in un con le scienze scaduti di pregio. A non errar però nell'ordine de' tempi è mestieri allontanarsi da Montucla e Bailly, che dicono all'imperador Michele III imposta la condizione, atteso che Almamone morto l'anno 833 non potè aver che fare con Michele III salito all'impero di Costantinopoli l'anno 842. Siccome gli scritti de' greci filosofi trapassati, così attese Almamone ad acquistare i filosofi più riputati, che rimanevano nelle greche provincie; e la durezza dell'imperator Teofilo contro i desiderj di lui fece spiccarne l'ardore, e la costanza. Volea a sè Leone arcivescovo poi di Tessalonica, il matematico (dice Condillac) più grande che fossevi a quel tempo in Costantinopoli, ma che pur trovavasi, narran gli autori dell'*Arte di verificare le date*, nel misero stato di vivere dando lezioni agli schiavi. Inviare a Teofilo, con cui Almamone avea guerra, ambasciadori con sceltissimi presenti, offerirgli considerevoli somme se a Leone permetteva di recarsi a Bagdad, scusarsi del non andare in persona a chiedergli questo filosofo: a tanto giunse un Califfo pel desiderio di un matematico. Ricusò ostinatamente Teofilo accondiscendere, non per condegna stima che facesse di Leone, ma per non appagar le brame dell'inimico Califfo; del che irritato Almamone, invadendo con tutta la forza delle sue armi l'impero, e menando sacco, gli fece pagar caro il villano rifiuto. Fu verso il fin del suo regno, l'anno 830, che Almamone soffrì questo amaro scontento da Teofilo non montato al trono di Costantinopoli che l'anno 829. Felice già nei primi anni del regno avea a sè tratti e raccolti periti interpreti delle greche opere: e bello il vederlo farsi di loro, e delle versioni lor commesse il più grande affare, tener con essi la più frequente conversazione, presedere alle conferenze loro, udirne con diletto le dissertazioni, interessarsi delle dispute, proporre come un di loro i suoi lumi. Dopo che le versioni furon fatte, quante maniere per incitare i maomettani a legger quei libri, per ispirare loro il genio delle alte scienze, che contenevano! E collegj, e università, e accademie, e premj, e il suo esempio. *Almamon scientiam suis locis quaerere aggressus cum graecorum regibus intercedens petiit ab illis, ut, qui apud ipsos essent, libros philosophicos ad ipsum mitterent, qui cum ad ipsos, quos habebant, misissent, conquisitis ille interpretibus peritis, eos ipsis accurate vertendos imposuit,* *cumque qua fieri potuit diligentia versi essent, homines ad eos legendos incitavit, eorumque perdiscendorum ingenium ingessit; ipseque doctis vacare, et eorum disputationibus interesse solitus, et eorum delectationibus delectari*. Così Abulfaragio tradotto dal Pocok. Per le quali cose giustamente gli assennati autori dell'*Arte di verificar le date* pareggian Almamone ad Augusto, a Leon x, a Luigi xiv. Il Bailly dice, che de' greci libri il primo a tradursi sotto gli auspicj di Almamone fu l'*Almagesto* di Tolommeo. Supposto ciò vero, convien dedurre, che esistessero già in araba lingua voltati i libri greci di geometría all'intelligenza dell'*Almagesto* necessarj: il libro degli *Elementi di Euclide* vi esisteva certamente per comando di Haroun, e per opera di Hegiago ben Joseph. Strano è ciò che Montucla, dopo avere, a cagione dei traduttori diversi, che dall'Herbelot, e dal Peirese si nominano, conghietturato, essersi fatte sotto il regno di Almamone dell'*Almagesto* più traduzioni, soggiugne, considerando il bisogno, che l'astronomía ha dei geometrici principj. *La plûpart des géométres grecs, et principalement ceux, qui sont nécessaires pour l'intelligence des livres d'astronomie, comme Euclide, Théodose, Hypsicle, Ménélaus, furent mis en arabe dès le regne d'Almamon, ou peu de tems après lui*. Come dopo! Come, senza previa versione di greca geometría, farsi più versioni della greca astronomía! Sicuramente, o gli arabi possedevano già in idioma loro de' greci geometri i libri a comprendere le dottrine dell'*Almagesto* necessarj, se fu questo de' greci libri per impero di Almamone tradotti il primo; o si dovette per ordinato comandamento di lui alla traduzion di questo la traduzion premetter di quelli. A me pare, che, siccome su i nuovi esemplari, com'egli è a credere, da lui conseguiti, persuaso che migliori fossero di quelli che Haroun procurati avea, ingiunse ad Hegiago ben Joseph di emendare la versione degli *Elementi di Euclide*, non altrimenti se preesisteva in arabo volta altra opera geometrica greca all'intendimento dell'*Almagesto* richiesta, di essa in simil modo ingiunto ne avrà l'esame, ed il riparo d'ogni infedeltà, difetto, oscurezza. Che che sia di ciò, quello che è certo si è, che l'astronomía fu lo studio precipuo di Almansor, la passione di Almamone, il centro delle filosofiche cure di lui. Non è qui luogo di celebrare i grandi stromenti da lui fatti lavorare, le osservazioni da lui medesimo istituite intorno all'obbliquità dell'ecclittica, la magnifica intrapresa di esaminare il computo greco della grandezza della terra, commettendo a due drappelli di valenti astronomi di misurarne nella vasta pianura di Singar due gradi, la raccolta, il congiungimento, la tessitura in un corpo delle astronomiche cognizioni da diversi fonti ricavate, o per nuove osservazioni conseguite, nel volume recante in fronte il titolo *Astronomia elaborata a compluribus D. D. jussu regis Maimon*. Operazioni sì grandiose e solenni non potevano non incantare, non scuotere, non spignere la maomettana nazione. Hanno de' regnanti gl'ingegni il potere di determinar, ov'essi si affisano, gl'ingegni dei popoli. Sotto un re appassionato di astronomía doveano all'astronomía indirizzarsi i maomettani ingegni, di essa riscaldarsi gli animi, a proporzione del vincolo con l'astronomía formarsi i giudizj della utilità delle altre opere matematiche, sorgere la premura di averle nel proprio linguaggio, ed appararle. La greca opera di Diofanto riguardante le astratte relazioni de' numeri dimostrava un oggetto troppo estraneo, anzichè affine, al greco *Almagesto*. Questa io credo la cagione, per cui non trovasi la traduzione di essa sino ad arrivare, anzi passar oltre alla metà del secolo x, quando divenuta l'astronomica scienza tra i maomettani più adulta, più facile, più comune, l'amore della novità, l'ambizione di uno spicco singolare, il genio della sottigliezza spinsero alcuni ingegni a cercar altri spazj matematici, e Moamad AlBuziani tra questi a penetrare negli astrusi artifizj diofantei. Anteriore di più di un secolo e mezzo, ed astronomo a niuno secondo nel regno di Almamone, fu quel Moamad ben Musa Khuarezmita, primo ad insegnare ai maomettani l'arte dell' algebra. A guadagnarsi più distinta del regnante la grazia compendiò egli ad uso di quello il libro *Sindo Indo maggiore*, uno dei tre, spiega l'anonimo egiziano nella *Biblioteca arabica de' filosofi*, uno dei tre sistemi astronomici indiani, e l'unico, di cui tra gli arabi diffusa siasi chiara notizia, non essendo degli altri due a lor penetrati che i nomi di Argebakro, ed Arkando. Fece più il Khuarezmita astronomo. Su la norma di esso *Sindo Indo maggiore* costrusse le sue tavole astronomiche appresso i maomettani celebratissime, nelle quali però come poco accurate, per ciò che spetta il moto medio, riprende le tavole degl'indiani. Onde da lor dipartendosi, in ciò massimamente che all'equazione del moto, ed alla declinazione appartiene, si volge a calcolare la prima giusta il sistema de' persi, e la seconda conforme alla mente di Tolommeo, con aggiugnere alcune invenzioni sue proprie, certamente non ispregevoli. Questa opera egregia piacque in quella stagione agli astronomi indiani stessi; e lungi dallo scemare col tempo di grido, lo stese di età in età sino a questo giorno, scrive nel 1198 l'anonimo egiziano, ognora più ampiamente, rendendosi famosa per tutta la terra. Il sistema de' persi, da Moamad ben Musa prescelto in confronto di quel degl'indiani nel calcolo della equazione del moto medio presenta l'astronomía tra' persi già in buon grado al tempo del regno di Almamone; e rimontando ad Almansor, Abulfaragio mi mostra a' fianchi di lui un persiano astronomo, Nabacht, uomo esimiamente dotto, e conoscitor ottimo delle congiunzioni delle stelle, e degli effetti loro. Io non so conciliar queste cose con ciò, che al §. xxviiI del libro vI sopra citato scrive Bailly, cominciando a dire della nuova astronomía de' persi, avendo già detto della primitiva nella Storia dell' astronomía antica: *Cette science s'éteignit chez-eux, ou passa aux chaldéens; de-là transplantée à Alexandrie, elle ne revint dans la Perse qu'après avoir refleuri chez les arabes.* Dall'esposto per lo contrario apparisce, che l'astronomía de' persi concorse al fiorimento dell'astronomía appresso gli arabi, siccome pure l'astronomía degl'indiani. Laonde manifestasi, che dei paesi tutti, che li circondavano, trassero i saraceni a profitto lor le dottrine, siccome natural cosa era, che facesse una nazione elevata a grandezza di regno, ed ambiziosa di elevarsi ugualmente a grandezza di scienza. Il vide, l'appoggiò a ragioni, e sol mancò di stabilirlo co' fatti il Wallis: *Cum tam sollicite curarent saraceni authores graecos praestantissimos plerosque omnes in arabicam linguam traducendos, quo eorum doctrinae forent participes, non dubitandum est quin persarum, indorum, aliorumque orientalium doctrinam pariter ambiverint, quorum item linguae ab illa arabum minus differebant.* Ed un regnante sì illuminato, e sì desideroso di render illuminata la gente sua, quale Almamone, se avea ragione di una singolare premura e diligenza a raccogliere gli scritti degli antichi filosofi greci, non potea restrignere ai filosofi nella Grecia viventi, ne' quali la scienza era venuta meno, i suoi inviti; ma dovea con proporzione più allettanti estenderli alle regioni, nelle quali le scienze trovavansi in fiore. L'Herbelot ce lo dipigne di fatto qual esser doveva: *Mamoun fut amateur des lettres qu'il possédoit à un très-haut dégré. Il s'étoit appliqué particuliérement aux sciences spéculatives, et il fit des dépenses extraordinaires pour assembler de tout côté des gens savans, et pour rechercher les livres les plus curieux écrits en hébreu, en syriaque et en grec, qu'il fit traduire en langue arabique . . . . Il favorisa indifféremment les personnes doctes de quelque réligion qu'ils fussent, les quelles réciproquement contribuoient beaucoup à la gloire de ce monarque par les présens qu'ils lui faisoient de leurs ouvrages, recueillis de tout ce qu'il y avoit de plus rare chez les indiens, les mages, les juifs et les chrêtiens orientaux de toutes les sectes.* Nè fu novità del regno di Mamone il trasferirsi dall'India nelle maomettane provincie dottrine e dotti. Retrocedendo con Abulfaragio, io scorgo alla corte di Haroun il medico indiano Saleho ben Nahula, ed altro, parimente indiano, dall'Herbelot additato mi viene di nome Manghè. E siccome a detta di Abulfaragio, sebbene prima di Almansor non si attendesse dagli arabi punto alle scienze, eccezione però donavasi alla medicina, della quale l'amor della vita facea sentire il pregio, e persuadeva il coltivamento; così forse anche in quel tempo a lume migliore dell'arte tiravansi dall'India e mediche cognizioni e medici; e fu forse tal oggetto, che aprì la scientifica comunicazione della maomettana con l'indiana gente. Il frutto migliore di questa comunicazione si fu l'indica aritmetica tra l'araba nazione trasfusa. E questo frutto fu certamente anteriore al regno di Almamone, porgendone sicuro argomento il compendio del libro *Sindo Indo maggiore* a comodo di lui fatto da Moamad ben Musa Khuarezmita. Senza che l'indiana aritmetica si fosse già tra la maomettana nazione introdotta, come avrebbe potuto Moamad ben Musa Khuarezmita intendere, e trarre in ristretto il libro per sua natura pieno di numeri e di computi all'indiana, e come avrebbe il compendio potuto servire ad uso del gran Califfo? Ciò anzi suppone, che l'indica aritmetica fosse già per tutto il maomettano impero, dall'Arabia alla Corasmia, propagata, bene stabilita, ed ai sapienti almeno divenuta familiare. Avanti pure che, salito Almamone al trono, salir facesse nel più alto grado di auge l'astronomía, di essa accendendo i più prestanti ingegni, io son portato a credere, che Moamad ben Musa adornasse il libro di logistica indiano, del quale ho altra volta parlato; ed eziandío, che ai maomettani egli desse le prime lezioni dell'arte algebraica. Doveva egli essere di scienza, e di età maturo, allorchè prese a ridurre in compendio ad uso di un regnante sapiente, quale Almamone, il libro *Sindo Indo maggiore*: il calcolo poi della declinazione conforme alla mente di Tolommeo dimostra, che lavorò egli le famose sue tavole, dopo che per ordine di Almamone era stato tradotto l'*Almagesto*. Il penetrar ben la mente di Tolommeo; il confrontare con le osservazioni le tavole indiane, ed il sistema persiano, e scorgere i difetti di quelle, la giustezza di questo; il combinare insieme tutto, e su di un sistema composto calcolar nuove tavole: tutto ciò non potè esser opera che di lunghi anni, i quali aggiunti ai già maturi, che Moamad avea prima di compendiare il *Sindo Indo maggiore*, dovevano in lui formare un'età, nella quale non si può persuadersi, che si volgesse ad illustrare quel libro di logistica indiano, ed a formare, e dettar ai maomettani nuove lezioni di arte algebraica. Viene ad appoggio del mio pensiero, per quanto all'algebra, una tradizione citata dai bravi monaci autori dell'*Arte di verificar le date*: *On prétend* (scrivon egli-no di Haroun) *que c'est sous son regne que les arabes inventerent l'algebre*. Questa tradizione risolvesi in due parti: la prima, che sotto il regno di Haroun cominciarono gli arabi ad aver l'algebra; la seconda, che essi da loro la inventarono. Stenteranno sì certamente quelli, che pensano aver gli arabi da Diofanto cavata l'algebra a spiegare come nel tempo, in cui appena cominciavasi dai maomettani a conoscere le cose matematiche greche, un di loro alzato si sia ad intendere le sottigliezze di Diofanto, e dai primi libri trarre l'arte algebraica per la parte che spetta l'analisi delle equazioni di primo grado, e dal libro IV e seguenti con penetrazione maggiore raccogliere l'analisi delle equazioni di grado secondo, senza inviluppparsi, e perdersi nelle astruse contemplazioni dei più reconditi rapporti de' numeri, e negl'infiniti spazj dei problemi indeterminati, ove frequentemente si smarrì Xilandro, e tal fiata Vieta, ed eziandio Bacheto. All'incontro essendo i maomettani da qualche tempo in possesso dell'aritmetica indiana, elevata già dall'acuto ingegno degl'indiani stessi a preclarissime invenzioni, splendenti appunto, al dir dell'anonimo egiziano, nel libro di logistica da Moamad ben Musa Khuarezmita adornato; qual difficoltà, che un maomettano, cioè Moamad medesimo, continuando il filo di quelle preclarissime invenzioni abbia composto, e discoperte le regole dell'arte algebraica; se pure non era quest'arte una di quelle preclarissime invenzioni medesime? Si può in successione di tempo aver detto, che gli arabi inventarono l'algebra, e in individuo, che inventolla Moamad ben Musa, in quella maniera che, giusta l'osservare del Bailly nel libro v dell' *Astronomia antica* §. x, li greci appellarono inventori tutti quelli, che loro recarono cognizioni forestiere, e per essi nuove. *Les grecs appelloient inventeurs tous ceux, qui leur apportoient des connoissances étrangeres, et nouvelles pour eux.* Venendo però noi dal Cardano istruiti, che il libro di algebra di Moamad ben Musa conteneva delle geometriche dimostrazioni, converrà inferire, che erano già, quand'ei lo compose, in arabo tradotti gli euclidei Elementi. Da tutto il sin qui (più a lungo di quello, che da principio concepito avea, ma non senza utilità) per me esposto, si fa palese: 1.°, che la Grecia non fu l'unica sorgente, dalla quale gli arabi tirarono le matematiche cognizioni, ma che da altre sorgenti pur ne tirarono; che l'astronomía loro fu di dottrine greche, perse, indiane composta; che tutta da una sorgente dalla greca ben rimota, dall'indiana cioè, ebbero l'aritmetica, la parte fondamentale di tutte le altre parti matematiche, ed insieme quella, della quale presso loro l'algebra non fu che un ramo: 2.°, che l'algebra appo gli arabi, anzi che di non guari meno antica che le matematiche dottrine greche, fu delle astronomiche di Tolommeo più antica, e degli *Elementi di Euclide* di tanto poco meno antica, che dir si può coetanea: 3.°, che quanto con tale antichità è facile a comporsi, che l'algebra insegnata ai maomettani per la prima volta da Moamad ben Musa Khuarezmita sia stata una delle preclarissime aritmetiche invenzioni indiane, od una invenzione dal Chuarezmita matematico ad esse, il lume lor seguendo, aggiunta; tanto riesce penoso, se non anzi impossibile, a conciliarsi, che sia stata una derivazione dall'opera di Diofanto. Per le quali cose al riflesso di Montucla restano tolti i fondamenti, e rivolta in contrario la conseguenza. Obbiettasi egli medesimo la differenza dal Wallis notata fra le due scale di Diofanto e degli arabi, e non può a meno di confessare: *Cette différence semble effectivement designer une science puisée dans une autre source*. Pure resistendo alla forza, che sentiva farsi, soggiugne: *Je n'ose cependant point trop insister sur la validité de cette raison*. Forse avrebbero finito di determinarlo le altre due differenze tra le medesime scale da me avvertite. Sebbene, qual bisogno di tali nuove ragioni, se nella parte III, libro II, art. I si decide da sè medesimo? *L'algebre* (scrive egli) *qui avoit pris naissance chez les arabes*. Questo però è troppo; poichè supposto anche, che gli arabi abbiano per parte loro inventato da loro stessi l'algebra, non si può tuttavía dire, che l'algebra preso abbia appo gli arabi il nascer suo, essendo indubitato che prima fu ella presso i greci.

§. XII. Contraddice ad alcune cose da me qui sopra addotte ciò, che a sostegno della greca origine dell'algebra araba scrive il rinomatissimo abate Andres nel cap. III del tomo IV, pag. 81: *Gli arabi preser da' greci l'aritmetica, la geometría, l'astronomía, e tutte le parti delle matematiche; e solo avranno lasciata l'algebra, e si saranno presa la fatica di cercarla da loro stessi, mentre l'avevano ne' libri greci?* L'argomento cade, sol che dal numero delle parti matematiche, che gli arabi ebber dai greci, si tolga l'aritmetica; e su di ciò, senza mandare il mio leggitore a veder nella mia *Storia dell'aritmetica* l'indiana origine dell'aritmetica araba, oggidì nostra, io lo prego leggerne le prove dal medesimo preclaro Storico d'ogni letteratura egregiamente recate nel capitolo II del tomo medesimo. Si troverà anche rispetto all'astronomia molto in poco in quel bel tratto. *Non ardirò di fissare con precisione il vero tempo dell' introduzione delle indiane cifre presso gli arabi; ma si potrà congetturare con qualche probabilità, che sino dal tempo di Aroun Raschid; e molto più in quello di Almamon, quando si intraprendevano spedizioni letterarie all'India per acquistare i lumi scientifici, che conservavano i bramani; quando si facevano traduzioni de' libri astronomici, e di altri degli indiani; quando insomma avidamente si abbracciava quanto poteva servire alla coltura, ed alla istruzione degli studiosi arabi: che allora appunto coll'astronomia, e con molte altre filosofiche cognizioni dagl'indiani si acquistasse anche la lor aritmetica.* Nè poi dal non aver gli arabi dalla greca algebra tratta la loro, ne segue, che abbiano lasciato di farne conto in mezzo alla premura, che ebbero di ornarsi delle altre greche matematiche dottrine. Non di tutte queste al medesimo tempo si ornarono; e quando furono in grado tradussero anche Diofanto, e dei sottili lumi di lui illustrarono l'ingegno loro.

§. XIII. Non senza ragione l'anonimo egiziano, il Cazuineo, l'Abulfaragio al patronimico nome Moamad ben Musa aggiunsero l'appellazione locale Khuarezmita. Ciò fecero per distinguere questo Moamad ben Musa da un altro, cui, la genealogía continuando, dissero Moamad ben Musa ben Schaker. Era tanto più necessaria la diversità degli aggiunti, quanto era più da temersi, che si confondesse l'uno dei celebri uomini con l'altro. Ambidue denominati eziandío Abu Giafar, ambidue astronomi, ambidue nel regno di Almamone vissuti: qual cosa più facile, che prender questo per quello, attribuire all'uno gli onori all'altro dovuti? Casiri li distingue nell'indice della sua *Biblioteca* *arabico-hispanica* sì al nome Moamad ben Musa, sì a quello di Abu Giafar, notando alcune delle cose ed opere loro diverse. Io ne trascelgo due; l'una del Moamad ben Musa Khuarezmita, ed è l'aver esso costrutte le tavole astronomiche sul sistema *Sindo Indo*, con alcune correzioni, fondate, per tanto tempo fra' maomettani celebri; l'altra del Moamad ben Musa ben Schaker, ed è l'essere stato maestro di Thebit. Cardano, e Tartaglia ommisero il locale aggiunto di Khuarezmita, perchè ignorando eglino, e gli altri italiani analisti di quel tempo la ragione particolare di esso, l'avranno stimato un dippiù di niuna importanza; e l'ommissione non partorì in loro equivoco, perchè di cosa spettante a Moamad ben Musa ben Schaker non ebbero a parlare, e rispetto a Moamad ben Musa Khuarezmita tutto il lor dire si restrinse a decantarlo dell'algebra inventore. Non fu così in due illustri sapienti dell'età nostra, quali Bailly, ed Andres. Il primo nel tomo I dell'*Astronomia moderna* libro V, degli *Eclaircissemens détaillés* §. VII, fa uno stesso il Moamad ben Musa autor delle famose tavole astronomiche, ed il Moamad ben Musa, che con i due insigni fratelli Ahmed, ed Hasen nella casa loro sul ponte di Bagdad, osservando le altezze meridiane del sole nel solstizio d'inverno, e in quello di state, dedusse di gradi 23, minuti 35 l'obbliquità dell'ecclittica; e questi tre valenti fratelli furono i figli di Schaker. L'abate Andres nel tomo IV, capo III, subito dopo aver detto, che Moamad ben Musa fu secondo il testimonio del Cazuineo citato dal Casiri il primo, che insegnasse ai maomettani l'algebra, soggiugne, che discepolo di Moamad fu Thabit ben Corrah; e così ecco anche per uno scrittore sì versato nell'araba letteratura, quale l'abate Andres, il Moamad ben Musa Khuarezmita, il vero maestro primo dell'algebra ai maomettani identificato con Moamad ben Musa ben Schaker, che ebbe per vanto di aver discepolo Thebit. Da questi due equivoci a due sì chiari Storici sfuggiti manifestasi l'importanza di ristabilire le intere denominazioni dagli arabi storici usate: *Moamad ben Musa Khuarezmita — Moamad ben Musa ben Schaker*, facendosi legge di non disgiugner dal patronimico comune gli aggiunti distintivi.

§. XIV. Giudicherà da tutto ciò, che per me fu sino ad ora discusso, il leggitore, se io abbia da principio esagerato in qualificare di intralciatissima la quistione dell'origine dell'algebra presso gli arabi. Tempo è di coglier il frutto delle discussioni congiugnendo i riflessi, e ricavandone, se non il vero, ciò che è il più verisimile. Vo a farlo nel continuo ordine delle proposizioni, che seguono:

Proposizione I. Ciò che intorno all'origine dell'algebra presso gli arabi si ha di autentico, si è, che Moamad ben Musa Khuarezmita il primo la insegnò loro. Il Cazuineo scrittor autorevole il dice, §. III: niun fatto storico, niuna sentenza, niun raziocinio vi si oppone. Con ciò unitamente al primo maestro vien anche assegnato all'incirca il tempo, in cui gli arabi cominciarono ad essere nell'algebra istrutti. E questo tempo combina con la tradizione, che ciò sia succeduto sotto il Califfo Haroun, §. XII.

Proposizione II. Quantunque l'anonimo egiziano a lode di Diofanto asserisca, che quanti arabi di algebra scrissero, su i fondamenti di lui insistettero; pure deesi attendere: 1.° che Abulfaragio trascrivendo dell'anonimo le altre parole di lode rispetto a Diofanto, non trascrive quelle di tale asserzione, §. II: 2.°, che essa asserzion non concorda con i tempi d'assai fra lor distanti, nei quali fu tra gli arabi l'algebra introdotta, e presentasi Diofanto in araba lingua convertito, e interpretato: 3.° nè può comporsi con la inabilità, in cui al tempo di Haroun, o all'intorno, si trovavano gli arabi di penetrare le sottigliezze di Diofanto. Laonde l'autorità dell'anonimo egiziano resta in ciò per varj modi combattuta. Ed aggiugnerò, che esso anonimo nell'estollere il raro e mirabile geometrico ingegno di Hassen, il minore dei tre celebri fratelli, dopo aver raccontato, che non volle mai passar oltre il VI libro degli *Elementi di Euclide*, per poter vantarsi di sciogliere da sè qualunque altro problema geometrico, pone tra i nuovi escogitati di lui, non caduti in mente ad alcun degli antichi, il problema di condur due linee medie proporzionali tra due altre: nel che ognun vede quanto poco dimostrisi istrutto della greca geometría; laonde sorge in animo sospetto, che essendolo ugualmente della greca algebra e della araba, possa aver alterato ciò che da altri avea udito, estendendo al primo maomettano maestro di algebra, già di ben quattro secoli da lui lontano, il profitto, che gli algebristi maomettani di seguito tratto aveano da Diofanto.

Proposizione III. Paragonando l'algebra greca e la araba, cresce la ragione di negar fede all'asserzion dell'anonimo egiziano; poichè lungi dal ravvisar nella seconda fattezze, che la dimostrin figlia della prima, vi si scorge all'incontro essenzial dissomiglianza. La scala dei gradi, fondamento dell'analisi primario, e Wallis dice unico, è per ogni verso, di natura, di principio, di progresso, differente presso Diofanto, e presso gli arabi, §. XII. E ciò non basta. Diofanto servesi di un simbolo astratto a significare il numero sconosciuto, e di un altro ad indicar il *meno*. Crederemo, che se avessero gli arabi da Diofanto cavata l'algebra non avrebbero conosciuto l'utilità di tali simboli? Che adottati non gli avrebbero? Che a conformità non ne avrebbero aggiunti degli altri, sino a tutta render simbolica l'algebra loro? E che di astratti simboli non abbian gli arabi fatto uso, si deduce con diritto dal non vederli in Leonardo, che l'algebra araba trasportò in Italia; e sarebbe una immaginazione affatto arbitraria l'infingersi l'opposto.

Proposizione IV. L'opera di Diofanto non è un libro, dal quale uno senza idea veruna di arte analitica possa aver tratto l'analisi delle equazioni di primo e secondo grado; ma un libro per lo contrario, che suppone un analista esercitato. Il concederà chiunque ha una giusta cognizione dell'opera di Diofanto: sentì così Bacheto, e si rivegga tutto ciò, che io ho scritto su questo proposito nel §. x del capo IV. Per quelle ragioni stesse, per le quali ho creduto non poter essere stato il libro di Diofanto una produzione di scienza tutta nuova tra' greci, stimo, e mi persuado non poter essere stato il fonte delle prime algebraiche nozioni presso gli arabi.

Proposizione V. Non si può dire, che l'algebra araba sia stata presa da qualche altro libro greco diverso da quel di Diofanto, facile, piano, elementare, acconcio all'uopo. Avendo io sostenuto nel §. x del capo IV, che avanti di Diofanto si sapesse da' greci l'analisi determinata, e di essa girassero scritti, potrebbe talun di ciò valersi, e pretendere, che da qualcheduno di tali scritti fossesi l'algebra araba derivata. Ma oltre al non potersi di sì fatta derivazione trarre dagli arabi storici testimonianze, non parlando eglino di altro greco analista che di Diofanto, sussisterebbero contro questa riformata opinione della nascita dell'algebra araba dalla greca le osservazioni tutte esposte nella Proposizione III.

Proposizione VI. Nulla vi ha nella storia rispetto a Moamad ben Musa Khuarezmita in individuo, che favorisca l'opinione aver lui dai greci presa l'algebra, che egli il primo a' maomettani insegnò. Se fosse stato Moamad ben Musa ben Schaker il primo maestro d'algebra ai maomettani, si potrebbe dare una speciosa sembianza all'opinione, che dalla greca si togliesse l'algebra araba; riferendo l'anonimo egiziano, che Moamad ben Musa ben Schaker, essendo ricco, fece di grandi spese per acquistar greci scritti; che molto si occupò con altri dotti da lui largamente stipendiati ad interpretarli; e che fu in persona nel paese de' greci. Nulla di ciò in Moamad ben Musa Khuarezmita. Non ci presenta la storia in esso che un matematico di una regione dalla Grecia lontanissima, ed all'India vicina, perito dell'indiana lingua, amante delle indiane cose, le quali traduce, emenda, compendia, adorna; e questi è il primo maestro dei maomettani nell'arte algebraica. Ecco un frutto della distinzione tra i due Moamad ben Musa, ed una conferma della necessità di essa per non lasciarsi abbagliare, e trar in errore.

Proposizione VII. Moamad ben Musa Khuarezmita non avendo cavata l'algebra dai greci, o la inventò egli stesso, o dagl'indiani la prese. Delle due la seconda mi par la verisimile. Se fama primieramente fosse stata, che Moamad ben Musa Khuarezmita avesse di suo ingegno inventato l'algebra, perchè non avrebbelo più espressamente detto il Cazuineo? Perchè avrebbe egli lasciato di rendergli in termini chiari e solenni questo onore? Girava per secondo al tempo di Cardano il libro di algebra di Moamad ben Musa Khuarezmita, e pure Cardano in celebrarlo inventor dell'algebra non dice, che ciò apparisse dal libro stesso, ma in un luogo cita falsamente a testimonio Leonardo Pisano, in un altro reca di aver così trovato scritto. Dovrem supporre nel maomettano algebrista modestia tanta di non lasciar trapelare il merito suo d'inveuzione, se veramente gli fosse spettato? Per altra parte l'algebra non fu presso i maomettani che un membro, il più nobil certo e più bello, ma non più che membro, dell'aritmetica o logistica. Ampissima nella *Biblioteca arabica de' filosofi* osservasi la significazione di queste due voci, e con preferenza della seconda; e già abbiamo al §. II veduto intitolar *De universa logistica* un'opera in tre libri quel Moamad AlBuziani, che comentò l'algebra del Khuarezmita matematico, e che fu l'interprete di Diofanto. Or un libro di logistica appunto indiano raccontasi, che adornò Moamad ben Musa Kuarezmita; libro prestante, e nel quale spiccava l'acutezza, l'ingegno degl'indiani a cagione delle preclarissime loro invenzioni. La cura stessa, che un uomo della fatta di Moamad ben Musa Khuarezmita si diede di adornarlo, accresce, ed eleva l'idea di questo libro. Il pensare adunque, che tra quelle preclarissime invenzioni indiane vi fosse l'arte algebraica, non è fuor di ragione. E io credo, che uno, anzi il più bello degli ornamenti, de' quali Moamad ben Musa Khuarezmita fregiò l'indiano libro, sarà stato il corredare delle euclidee dimostrazioni le regole dell'analisi delle equazioni di secondo grado. Se tra i maomettani non vi ebbe traduzione di Euclide prima dell'harounea, §. x, la geometría di lui fra essi non potea contar che poca età, quando Moamad ben Musa Khuarezmita se ne valse nel suo scritto di algebra. Attesa questa poca età della euclidea geometría tra i maomettani, vi ha pena a concepire, che un maomettano traesse dal secondo libro di essa l'artifizio dello scioglimento delle equazioni di secondo grado; egli è ben più facile, che avendo dall'indiana aritmetica le regole dello scioglimento, abbia conosciuto il rapporto di esse con i teoremi di Euclide, e gli abbia loro applicati a dimostrazione. Esse regole possono aver avuta una origine meramente aritmetica; poichè la verità, su la quale si appoggiano: che il quadrato di una quantità di due parti composta è uguale ai quadrati di ciascuna delle due parti, ed al doppio prodotto di una con l'altra: verità sì bella, e sì feconda ad un attento calcolator si appalesa in ogni moltiplica di un numero di due cifre per lui medesimo, o sia nella formazione del suo quadrato. Sia, per esempio, da formarsi il quadrato di 35. Scrivendo al modo indiano il 35 sotto il 35, e moltiplicando in primo luogo il 5 con il 5, si vede tosto il quadrato del 5; procedendo a moltiplicare il 5 di sotto con il 3 di sopra, poi viceversa il 3 di sotto con il 5 disopra, comprendesi nascerne il doppio prodotto del 3 con il 5; finalmente moltiplicando il 3 di sotto con il 3 di sopra si presenta il quadrato del 3. È facile trasportare la verità spontaneamente offerentesi nel quadrato di un numero qualunque di due cifre al quadrato di un numero di una sola figura, per esempio al 7, concependolo diviso in due parti, per esempio 4, 3. Non già, che non debbano aver avuto gl'indiani i geometri loro, ugualmente che i greci; ma vo' dire, che la verità, su la quale l'analisi delle equazioni di secondo grado si fonda, non ha della geometría una necessità assoluta, e che senza di questa, specolando solamente su i numeri, poterono gli eccellenti indiani aritmetici quella inventare. Concepisco adunque il trattato di algebra di Moamad ben Musa Khuarezmita un composto d'indiana aritmetica dottrina nell'essenza, di euclidea dottrina nel modo, o sia nel corredo. Questo composto concetto è intorno all'origine dell'algebra tra gli arabi ciò che in ultimo esame, il tutto conciliando, mi par avervi di più verisimile, ed a che mi appiglio, abbandonando un altro sistema d'idee, che dapprima sorto mi era in mente: che il Khuarezmita matematico, esercitandosi in aritmetiche quistioni, fosse primieramente dall'indiretta via di trarre dagli errori il vero per l'artifizio delle false posizioni alla bella diretta via passato di trarre dai rapporti dello sconosciuto con il conosciuto numero il valor di quello pel semplice mezzo di equazioni di primo grado; che meditando indi su la geometría di Euclide, e fissando particolarmente sul quarto teorema del libro II l'attenzione, avanzasse di un altro passo, con tirare da esso l'analisi delle equazioni di grado secondo. Ciò non toglieva, che il Khuarezmita matematico potesse esser detto dell'araba algebra inventore. Così salvo gli rimanea questo glorioso grido, che già in Italia godette. Ma che prendersi affare, ed usarsi violenza per salvargli tal gloria, se non fu sollecito di dargliela il Cazuineo, se non se la diede egli medesimo?

§. XV. Non ho stimato degno di esser posto nella schiera degl'illustri dotti, de' quali ho sopra discusso le testimonianze ed i pareri, il Saverien: tanto sono grossolani gli errori, de' quali è pieno zeppo l'articolo di lui su la storia dell'algebra. Produrrollo io, o no, sotto lo sguardo del mio leggitore? Sarà lo scorrerlo giovevol cosa a chi troppo ama, e grata a chi giustamente apprezza certe opere di ampissima sfera, qual è quella del Saverien: *Histoire des progrès de l'esprit humain dans les sciences exactes, et dans* *les arts qui en dependent. Les mathématiciens arabes* (dice egli) *sentirent les premiers le défaut de l'arithmétique, et pour y suppléer ils chercherent à la généraliser en calculant avec des caracteres symboliques. Par le moyen de deux sortes de caracteres ils distinguerent les choses connues de celles qu'ils ne connoissoient pas, et formerent aussi une nouvelle arithmétique, qu'ils appellerent* symbolique. Dove ha egli il Saverien apparato tutto ciò? *Nous ignorons* (e lo ignoreremo eternamente) *ce que c'étoient que ces symboles, et en quel tems les arabes commencerent à les employer: seulement nous savons qu'en suivant cette idée, c'est-à-dire en se servant d'expressions générales et de signes universels, ils vinrent à bout de calculer non seulement ce qu'ils ne connoissoient pas encore, mais aussi ce qu'on ne sauroit exprimer par aucun nombre. Ils firent plus: ils soumirent au calcul les quantités positives et les quantités négatives, et dès lors ils résolurent des questions, dans les quelles il s'agissoit d'évaluer en même tems et le bien qu'un homme avoit, et celui qu'il ne possédoit pas*. Bravi arabi! Sconsideratissimo Leonardo di Pisa, che trasportando dalle provincie loro in Italia l'algebra, lasciò là i simboli e i calcoli delle quantità negative! Ma e il libro di Moamad ben Musa Khuarezmita come vi venne di sì belle cose sfregiato? *On croit que ces peuples ont appris tout cela des indiens. C'est une prétention*: e falsa, tosto che gli arabi furono i primi; e così essendo, falsa del pari l'opinion, che segue. *Il y a des érudits au contraire, qui veulent que ce soient les grecs qui aient enseigné cette invention aux arabes. Quoiqu'il en soit, ceux-ci* (gli arabi) *employoient des caracteres grecs* (curiosa cosa!) *pour exprimer les quantités connues et les quantités inconnues. Ils purent par ce moyen décomposer une que-*

stion, pour comparer ensemble ces quantités, et ils formerent ainsi une arithmétique symbolique, ou un art qu'ils appellerent Algiał W Almulkabala, (voleva dire *Algiabara et Almukabala*) *deux mots qui signifient* reparer, rétablir (significherebber lo stesso), *et que nous avons rendus par le mot algebre*. Dopo che gli arabi hanno fabbricato un'aritmetica simbolica di caratteri greci, possiam noi pure aver renduto con voce araba, ed una sola, derivante dall'un dei nomi arabi di essa, le significazioni di ambedue. Si vegga il capo II. *Les ouvrages, qu'ils* (gli arabi) *publierent sur cet art, ne sont point venus jusqu'à nous, et nous ignorérions la découverte qu'ils en ont faite, si Diophante, qui vivoit vers le milieu du quatrieme siecle* (vedi cap. IV §. IV) *ne nous l'eût appris: on peut même regarder cet auteur comme le premier algébriste. Son livre est intitule* Questions arithmétiques. *C'est-là qu'on voit les progrès que les arabes y avoient faits jusqu'à ce tems*. Dove son io! Leggo o sogno? Diofanto fu egli greco, o arabo? E se fu desso il primo algebrista, come l'opera sua mostra i progressi dell'algebra sino al tempo di lui? *Xilandre dans le cinquieme siecle traduisit l'ouvrage de Diophante du grec en latin. Et environ vers le huitieme siecle un arabe nommé Mohammed-ben-Musa composa un traité d'algebre, dans lequel il donna la résolution des problémes du second dégre; problémes qu'on n'avoit point encore résolus parfaitement*. Confusi i caratteri, confuse le lingue, le persone, le nazionali attinenze loro, non dovevano andar esenti i tempi, e conformità voleva, che fossero essi pure confusi. Lascio di Moamad ben Musa, primo tra i maomettani a sapere, ed insegnar di algebra, fatto qui un tardo algebrista tra loro, che l'analisi delle equazioni di secondo grado perfeziona; ma Xilandro, che di tre secoli lo precede, che nel secolo quinto traduce l'opera di Diofanto, non avendo realmente ciò fatto che verso il fine del secolo XVI. Dio buono! qual pervertimento di tempi non è questo? Si può pertanto dare storia di falsità, d'incoerenze più ridondante di quella, che il Saverien offre dell'algebra? Tristo frutto, ed esempio di una inconsideratezza, il più sovente, uguale al coraggio di troppo vasta intrapresa!

APPENDICE.

Del grado, al quale gli arabi giunsero nell'analisi, e degli scritti loro.

Moamad ben Musa Khuarezmita espose nel suo libro di algebra l'analisi delle equazioni complete di secondo grado; ma non toccò certamente alle miste di terzo, poichè girando per Italia esso libro di lui, non avrebbero avuto a studiare per ritrovarne lo scioglimento Scipione Ferreo, e Tartaglia. E non è maraviglia, che la prima algebra dal Khuarezmita matematico agli arabi insegnata, alle equazioni di secondo grado si limitasse. Ma fermaronsi qui sempre, e tutti gli arabi algebristi? Ebbero eglino la scala dei gradi algebraici? e quale il motivo, quale l'oggetto di questa scala? Combinando fra loro i gradi, ciascun con tutti, costrussero delle estese tavole dei prodotti loro. L'uso di sì fatte tavole è chiaro: ne avean bisogno, e se ne valsero ad abbassare al vero grado le equazioni di grado spurio; per esempio, per abbassare ad $x^2 = n$ l'equazione spuria di sesto grado $x^6 = n x^4$, ed alla $x^2 + p x = n$ la $x^6 + p x^5 = n x^4$. Ma non dovette esser questo tutto lo scopo, tutto l'utile della scala, anzi nemmeno il primario, e il più intrinseco.

Diofanto premise alle quistioni sue la scala sua de' gradi, perchè aveva in esse a sciogliere delle equazioni pure di gradi superiori: è ben naturale, che allo stesso intento abbian gli arabi formato la scala loro de' gradi. Sapevano eglino per dottrina della indiana aritmetica estrarre non solo la radice quadrata, ma del pari la cubica: con ciò erano immediatamente in istato di sciogliere non meno l'equazione pura di terzo grado, che la pura di secondo. Componendo la estrazione della radice quadrata con la estrazione della radice cubica, poterono facilmente sollevarsi allo scioglimento di tutte quelle equazioni pure, che son di grado per elevazion quadrata ed elevazion cubica, quanto si voglia ripetute, generato: restavano escluse le equazioni pure de' gradi, che non sono di tal generazione; come $x^5 = n$, $x^7 = n$..... Io ardirei quasi asserire, che fu appunto lo scioglimento per estrazione, che avevano in vista, ciò che determinò gli arabi a considerare per elevazion generati, piuttostochè per prodotto, quei gradi, che ammettono l'una e l'altra considerazione; a considerar esempigrazia x^9 piuttosto come ripetuto cubo $(x^3)^3$, che come prodotto $x^5 \times x^4$: onde limitando la considerazione del generamento per prodotto a quei gradi, che questa sola permettono, formarono la scala di due ordini differenti, l'uno all'altro inframischiati. Questa scala dovette esser dagli arabi formata, e stabilita avanti che Moamad AlBuziani traducesse, e comentasse, verso il fine del secolo X, l'opera di Diofanto; poichè altrimenti abbracciata avrebbero la scala di lui, senza pensare a fabbricarne su di una nuova ragione una differente, od almeno serbato avrebbero allo sconosciuto numero l'antonomastica appellazione di *Numero*, e la collocazione a primo grado della scala. Per conseguenza, giusta il mio avviso, prima altresì di tal epoca presero gli arabi a sciogliere equazioni pure di gradi al secondo superiori. Moamad AlBuziani, non che incontrare nell'opera di Diofanto equazioni di tal sorta da risolvere per iterata estrazion di radice quadrata o cubica, vi trovò da estendere sopra più composti soggetti, ed in più sottil maniera esercitar le idee e le regole del quadramento, e cubamento. Gli pose Diofanto sotto degli occhi un quadrinomio di terzo grado indeterminato, e gl'insegnò a renderlo con razionale valore perfetto cubo di un binomio; lo condusse ad un indeterminato quinquinomio di quarto grado, e ad un indeterminato quadrinomio di grado sesto; e gli artifizj gli scoprì per far divenir quello un esatto quadrato di un trinomio di grado secondo, e questo un quadrato esatto di un binomio di terzo (capo v Quadro algebraico dell'analisi di Diofanto, parte II, Artifizj di semplice ugualità num. 7, 8, 10). Ciò non basta: lo portò seco ad abbattersi in una equazione completa di terzo grado (capo IV, §. VII), e gli assegnò dello sconosciuto numero il valore. Era in verità equazione di facile scioglimento: se Diofanto abbia inoltrato Moamad AlBuziani a maggiori difficoltà; se lo abbia levato più alto, non possiamo noi con certezza deciderlo, chè non abbiamo fuorchè la prima metà dell'opera di Diofanto; laddove intera è a dirsi che l'avesse Moamad AlBuziani, se vale il non essere dall'Abulfaragio, e dall'anonimo egiziano, nel riferir della interpretazione, notata per imperfetta. Veduta da Moamad AlBuziani, e da quelli, che lessero il comento di lui sopra Diofanto, l'equazione di terzo grado dal greco analista sciolta, non sarebbe maraviglia, anzi cosa naturalissima, che alcun arabo invogliato si fosse di tentar altri simili scioglimenti di cubiche equazioni. Montucla, che non considerò, non seppe alcuna delle cose sin qui osservate, pure avverte esistere nella Biblioteca di Leyden un manoscritto intitolato: *Algebra delle equazioni cubiche, o Risoluzione dei problemi solidi*; opera di Omar ben Ibrahim. Un libro, che ha a tutto suo argomento le equazioni cubiche, e i problemi solidi, non è a credere, che si ristringa ai problemi solidi delle equazioni cubiche pure. Sono pertanto giusti i lamenti di Montucla: *Que des faits curieux, et peut-être intéressans à d'autres égards, n'y auroit-il pas à recueillir dans plusieurs de ces manuscrits! Qu'il est à regretter de ce que parmi ceux qui sont à portée de les consulter, et qui connoissent la langue, dans laquelle ils sont écrits, il n'y ait personne, qui ait le zele d'aller au de-là du titre*. Contro tutto lo esposto nasce una difficoltà, considerando, che Leonardo Pisano, il quale nel secolo XII fu in Africa e in Asia, e di là portò in Italia con tutte le altre parti dell' aritmetica l'arte algebraica ancora, il quale vantasi di dare nel suo abaco la piena dottrina de' numeri, *plenam numerorum doctrinam*, non oltrepassa però l'equazione pura, e l'equazione completa di secondo grado. Ma non manca a me, secondo i miei divisamenti, una qualche risposta. Dichiara Leonardo di aver composto il libro suo tutto dell'indiana dottrina, di qualche cosa di Euclide, di qualche cosa del suo: egli si arrestò all'analisi delle equazioni di secondo grado, non altrimenti che Moamad ben Musa Khuarezmita, perchè l'indiana analisi, almen quella dall'India uscita, non si estendeva più in là. Ecco pertanto tutto il mio pensare su l'algebra araba. Moamad ben Musa Khuarezmita, primo ad insegnare ai maomettani l'algebra, trasse dagl'indiani scritti l'analisi delle equazioni di primo e secondo grado, e la parte spettante le equazioni complete di grado secondo di euclidee dimostrazioni adornò, e munì: i cultori dell'algebra, che gli succedettero, formarono la scala dei gradi, e sciolsero le equazioni pure di que' gradi superiori, che per ripetuta elevazion quadrata e cubica si generano: su l'opera di Diofanto passarono a contemplare, assoggettarsi, trasferire a determinata forma quadrata, o cubica gl'incogniti polinomi, ad acquistar idea di una equazione completa di terzo grado, e dello scioglimento di essa; quinci eccitati altre equazioni cubiche, o complete, o imperfette si finsero, che vessando lo ingegno riuscirono a sciogliere; ma sempre forse con particolari artifizj, nè mai con regola generale. Lo zelo degli arabi per l'algebra, il pregio, in che presso loro tenevasi, appariscon dalla moltitudine degli scritti e dottrinali, e poetici su di essa. In tutti gli arabi libri di aritmetica, di logistica, di scienza, o disciplina di numeri *universa*, ed in molti eziandío mancanti di questo espresso aggiunto, intender debbesi compresa l'algebra come parte. Io non ripeterò qui di essi la nota data nella mia *Storia dell'aritmetica*, nè mi fo carico di tutti enumerare i libri particolari di algebra, ma solamente quelli, che nelle biblioteche, le quali ho dovuto leggere, mi è avvenuto di trovar registrati.

SCRITTI ARABI DI ALGEBRA.

Scritti lodati nella *Biblioteca arabica de' filosofi*, tradotta in latino dal Casiri nel tomo I della sua *Biblioteca arabico-hispanica*.

Ahmad ben Mohamad ben Meruan Ebn Althajeb persa Sarkhasensis, Jacobi ben Isaaci Alchindi auditor. — Lib. De arithmetica, algebra, et comparatione seu proportione.

Alì ben Ahmud Alomrani Muselensis. — Comment. in libros de algebra jamdudum evulgatos ab Abì Kamelo Schagia ben Aslam qui Aegyptius calculator vocitatur. — Fatis concessit an. egirae 344, *Christi* 955.

Alhassan ben Alhassan ben Alhaitam Abu Alì ortu Basorensis, Aegypti incola — Scholia in algebram. — Obiit an. egirae 430, *Christi* 1039.

Mohamad AlBuzgiani — Commentarius in librum Alkhuarezmitae mathematici de algebra. — Comment. in librum Diophantis de algebra. — Comment. in librum Abì Jahia de algebra. — Demonstrationes propositionum, quae in Diophanti libro occurrunt.

Thabetus ben Corrah . . . . qui vulgo Thebit appellatur, natus Carrhae an. egirae 221, *Christi* 835. — *Problemata algebrica geometricis demonstrationibus demonstranda.*

Scritti, al riferir del Casiri, esistenti nella Biblioteca dell'Escuriale.

Abì Zaid Abdelrahmanus Alì ben Omar Aldalaili Cordubensis. — Opus de algebra titulo operationum arithmeticarum analysis cum Commentariis Alì Othaman Said ben Mohamad Alocbani granatensis.

Abi Abdalla Mohamad ben Omar, vulgo ben Badr hispalensis — Tractatus tripartitus exaratus anno egirae 744, Christi 1343, ubi de logistica, apologistica, et analogistica disseritur hac inscriptione, algebrae et comparationum epitome.

Poëma ex hemistichiis constans ejusdem argumenti, quod Mohamad ben Alcassem granatensis tractatum de algebra proxime memoratum illustraturus condidit an. egirae 711.

Anonymi Poëma de algebra.

Khogia Nassireddinus Thusaeus. — Arithmeticae et algebrae compendium in cap. XII distributum. — Floruit an. egirae 663, Christi 1264.

Scritti mentovati dall'Herbelot nella sua *Biblioteca orientale* alla voce *Gebr.*

Poëme composé d'hémistiques sur l'algebre, par Ebn Jassin, ou Jasmin.

Les merveilles de l'algebre. — Livre composé par Fakhreddin Al' addir.

Le dernier terme où l'on peut arriver, et le plus grand effort de l'esprit humain sur l'algebre. — Ouvrage d'Ebn Al-Hareth Alkhovarezmi.

Les fondemens et les principes de l'algebre, par Anburi.

Scritto al fine del tomo I della *Biblioteca Oriental Vaticana* illustrata dall'Assemani, riposto tra quelli, che egli stesso recò dall'oriente.

Mohammad Abu-Abdalla ben Mohammad ben Amri phanuchensis. — De algebra.

CAPO VII.

De' progressi dell'algebra da Leonardo Pisano a Fra Luca Pacioli.

§. I. Mancherebbe a questo Capo la materia, se vero fosse ciò che nella parte III, libro III, art. IV asserisce il Montucla: *L'algebre de Lucas de Burgo ne va pas au delà des équations du second dégré*. E non fu di ciò ripeter contento il Bossut nel discorso preliminare alla parte matematica della *Enciclopedia metodica*, ma volle di più aggiugnere nella pagina XXX: *On prétend, que Lucas de Burgo n'a pas été aussi loin que les arabes, ni même que Léonard de Pise, quoiqu'il lui soit postérieur*. E da chi si pretese tutto ciò? Orsù, io ho già fatto vedere sin dove giunsero gli arabi, dove nel suo abaco arrestossi Leonardo: vediamo, ad un fondato e giusto giudizio, che ci esibisca nel volume suo Frate Luca.

§. II. Al fine della pagina 148 prende egli a trattare dei *capitoli*, equazioni diremmo noi, *proporzionali*, dicendo, che *li prischi antecessori hanno strette lor forze operative a sei capitoli, alli quali poi proportionaliter infiniti altri si possono formare*. I *capitoli proporzionali*, che quivi scioglie, sono, al nostro modo di esprimere,

1.° $x^4 = n$ . . . . 2.° $x^4 = n x$ . . . . 3.° $x^4 = n x^2$

4.° $x^4 + n = q x^2$ . . . . 5.° $x^4 + q x^2 = n$ . . . . 6.° $x^4 = n + q x^2$.

Ma in oltre dai problemi 17 e 20 su le quantità continuamente proporzionali a questo luogo rimise la intelligenza dello scioglimento della equazione $x^8 + q x^4 = n$, del quale anticipò colà intanto il resultato, cioè il valore di x. E le parole testè recate di lui apertamente manifestano, che senza limite estese egli Fra Luca le idee sue, tutte in un sol atto comprensivo della mente abbracciando, di qualunque grado, le equazioni della forma in genere $x^{2m} \mp q\,x^m \mp n = 0$, e di tutte intendendo dar norma di scioglimento nell'insegnare il modo di sciogliere le tre di quarto grado qui sopra esposte. Di fatto dopo la spiegazione di tal modo conchiude: *E quello che abbiamo dedutto di censo de censo se habi a intendere de qualunca altra dignità proportionaliter.* Chiama poi Fra Luca codeste equazioni *proporzionali a quelle del secondo grado*; perchè siccome nell'equazione in genere del secondo grado $x^2 \mp q\,x \mp n = 0$ vi ha, rispetto ai gradi di x, il medesimo intervallo dal termine n al termine $q\,x$, e da questo al termine x^2; non altrimenti nell'equazione, ad esempio, $x^8 \mp q\,x^4 \mp n = 0$, ed universalmente nella $x^{2m} \mp q\,x^m \mp n = 0$, l'intervallo dei gradi di x è uguale dal termine n al termine $q\,x^m$, e da questo al termine x^{2m}. Or non si può concepire questa uguaglianza d'intervalli ne' gradi di x, se nel termine n non si concepisca x a grado zero, senza però, che n sia moltiplicato per zero, poichè altrimenti il termine n non sussisterebbe, cadendo a zero. Noi concepiamo n moltiplicato per x^0, e dimostriamo, che x^0 è $= 1$, il perchè la moltiplica di n per x^0 non annienta, nè altera per alcun modo n. Io non dirò giammai, che Fra Luca ebbe queste idee; ma altrettanto non mi si negherà, che fu qualche cosa di queste idee, un rudimento di esse, un primo passo alle medesime il considerare nel termine n l'incognita quantità x a grado zero, senza alteramento del valore di esso n, ed il paragonare lo stesso grado zero di x con gli altri gradi numerici di lui,

30

e misurarne gl'intervalli. Spandesi quinci lume su la scala de' gradi dagli arabi, e poi dai primi nostri analisti usata (capo VI, §. X): il numero noto n posto a primo grado della scala comparisce, a non penetrar più oltre, una cosa alla scala medesima estranea, e affatto slegata dai gradi di x; ma il legame vi si concepisce, se ad n s'intende accoppiato x a grado zero. Noi siamo soliti chiamare le equazioni della forma $x^{2m} \pm q\, x^m \pm n = 0$, *Equazioni derivative del secondo grado*, perchè la forma loro dalla forma di quelle del secondo grado deriva. Non dèe dispiacere il nome primo loro imposto di *equazioni a quelle del secondo grado proporzionali*. E si osservi, che oltre a prender questo titolo nel significato di somiglianza nella gradazione de' termini, si può dargli un senso più profondo. Sia, a spiegarmi, da sciogliere l'equazione $x^8 + q\, x^4 - n = 0$: posto $x^4 = X$, codesta equazione di ottavo grado si trasforma nella equazione di secondo, $X^2 + q\, X - n = 0$; e supposto, per lo scioglimento di questa, determinato il valore di X, si troverà poi $x = \sqrt[4]{X} = X^{\frac{1}{4}}$. Ora $X^{\frac{1}{4}}$ è il quarto termine di una proporzione continua cominciata da X, cioè della proporzione continua $X^1 : X^{\frac{3}{4}} : X^{\frac{2}{4}} : X^{\frac{1}{4}} :$. Dunque supponendo due equazioni: 1.ª $x^2 + q\, x - n = 0$; 2.ª $x^8 + q\, x^4 - n = 0$, nelle quali le quantità p, n sieno le medesime, passa tra le radici della prima, e le radici della seconda un determinato rapporto di continua geometrica proporzione; cioè la radice della seconda è quarta continua proporzionale dalla radice della prima discendendo per gli esponenti rotti $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$, o reciprocamente la radice della prima è la quarta continuamente proporzionale dalla radice della seconda, ascendendo per esponenti interi nella progressione $x^1 : x^2 : x^3 : x^4$. E in generale supposte due equazioni: 1.ª $x^2 \pm q\,x \pm n = 0$; $x^{2m} \pm q\,x^m \pm n = 0$, le quali abbiano ai termini gli stessi segni, e comuni le quantità p, n, la radice della seconda sarà una m^{esima} proporzionale continua dalla radice della prima, discendendo da 1 per gli esponenti rotti $\frac{m-1}{m}$, $\frac{m-2}{m}$, $\frac{m-3}{m}$ .... $\frac{1}{m}$; e reciprocamente la radice della prima sarà la m^{esima} continua proporzionale dalla radice della seconda, ascendendo da 1 per gli esponenti interi 2, 3, 4 .... m. Per due versi adunque alle equazioni della forma $x^{2m} \pm q\,x^m \pm n = 0$, egregiamente conviene il titolo di *proporzionali* a quelle di secondo grado: e perchè procedendo i gradi dell'incognita nei tre termini delle une, e delle altre con due uguali intervalli, ciascun la metà del grado dell'equazione, cioè della grandezza m, essendo il grado dell'equazione $2m$, tengono conseguentemente un simile e proporzionato processo di aritmetica progressione; e perchè le radici delle une hanno alle radici delle altre un determinato rapporto di continua proporzionalità geometrica. Per le quali cose rendesi manifesto essere il titolo di *equazioni proporzionali* a quelle di secondo grado più significante che il titolo di *derivative* di esso. Del rimanente non è nuovo, o recente questo titolo, usato avendolo Cardano, il quale sul principio della sua *Arte magna* scrive, che ai *capitoli* da Leonardo Pisano tramandati furono dopo lunghi intervalli di tempo da incerto autore aggiunti tre *capitoli derivativi*, i quali però Luca Paciolo pose con i principali. *Post multa vero temporum intervalla tria capitula derivativa illis, quae Leonardus Pisanus reliquit, addita sunt incerto authore, quae tamen cum principalibus a Luca Paciolo posita sunt*. Al dir del Cardano Fra Luca non si può riguardare per l'autor dello scioglimento delle tre equazioni $x^4 + n = q x^2$, $x^4 + q x^2 = n$, $x^4 = n + q x^2$, che sono le tre più immediatamente derivate, o con proporzione più immediata formate dalle tre di secondo grado $x^2 + n = q x$, $x^2 + q x = n$, $x^2 = n + q x$, e delle quali Cardano intende parlare. E di vero Fra Luca, lungi dall'arrogarsi l'invenzion di tali equazioni, e degli scioglimenti loro, dice in espressi termini che *si danno* per essi *regole ordinarie*. Non disse però tutto Cardano in dire, che Luca Pacioli pose nel suo volume esse tre equazioni, avendovi eziandio anticipatamente posta, e sciolta la equazione più alta e di ottavo grado, $x^8 + q x^4 = n$, gettato lo sguardo dell'intelletto, ed il parlare su la infinita moltitudine di simili equazioni, ed avvertito di a tutte trasportar le regole di risoluzione applicate a quelle tre; e disse male in dire, che Fra Luca pose le medesime tre equazioni con le principali, avendole egli trattate a parte, e del nome di *proporzionali* a distinzione insignite. Soggiugne Cardano, che letto avea pure, che in seguito erano stati da ignoto analista inventati tre altri *capitoli derivativi* non mai usciti alla luce, sebben dei primi di gran lunga più utili, siccome quelli, che insegnavano la estimazione, o sia determinazion del valore dell'incognita quantità, allorchè si uguaglian tra loro cubo-quadrato, e cubo di essa incognita quantità, e numero dato. *Demum etiam capitula alia tria derivativa a quodam ignoto viro inventa legi, haec tamen minime in lucem prodierant, cum essent aliis longe utiliora, nam cubi et numeri et cubi quadrati aestimationem docebant.* I tre *capitoli derivativi*, di cubo-quadrato, di cubo, di numero, come qui Cardano accenna, composti, sono

1.° $x^6 + n = q x^3$.... 2.° $x^6 + q x^3 = n$.... 3.° $x^6 = n + q x^3$.

Ma e non eran questi compresi negli infiniti *capitoli proporzionali* da Fra Luca contemplati? Non si può dubitarne. Forse che non bastavano le regole da lui date, e che dai più bassi volle ai più alti *capitoli proporzionali* trasferite; forse che non bastavano esse regole a sciogliere codesti tre in una maniera generale e compiuta, e a ciò intese lo studio suo, e riuscì l'ignoto autore? Io non posso dilucidar questo punto, se non mostrando ciò che importa il generale, e compiuto scioglimento della equazione $x^{2m} \pm q x^m \pm n = 0$; nel che son difettosi gli stessi libri moderni di analitico ammaestramento. A proceder con ordine, e chiarezza farò principio dall'equazione di tal sorta più semplice, cioè da quella di quarto grado, dell'ultima analisi della quale, senza questo, io già doveva ad altro oggetto parlare, a render cioè palese, cosa quanto all'antica analisi onorevole, ignorata altrettanto. E non so se non dovrà rimpetto all'antica soffrirne l'analisi moderna qualche offuscamento.

§. III. Data a sciogliere l'equazione $x^4 \pm q x^2 \pm n = 0$, con aggiugner da ambe le parti $\frac{1}{4} q^2$, e trasporre $\pm n$, si ha $x^4 \pm q x^2 + \frac{1}{4} q^2 = \frac{1}{4} q^2 \mp n$; onde, estraendo la radice, $x^2 \pm \frac{1}{2} q = \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 \mp n\right)}$, e quinci poi, trasposto $\pm \frac{1}{2} q$, ed estratta di nuovo la radice $x = \sqrt{\left(\mp \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 \mp n\right)}\right)}$. L'analisi dell'equazione data non è qui finita: lo scioglimento compiuto di essa ricerca un altro atto, che io chiamerò l'ultimo atto analitico, ed è l'estrarre la radice quadrata dalla quantità $\pm \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 \mp n\right)}$. Questa comprende quattro casi, che sono

1.° $-\frac{1}{2} q - \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 \mp n\right)}$, 2.° $+\frac{1}{2} q + \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 \mp n\right)}$,
3.° $+\frac{1}{2} q - \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 \mp n\right)}$, 4.° $-\frac{1}{2} q + \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 \mp n\right)}$.

Della prima quantità, essendo negativa, non si può estrarre radice quadrata; e tal espressione di x, che noi chiamiamo valor di lui immaginario, non fu dai primi nostri analisti considerata. La seconda fu da essi presso a Euclide chiamata *binomio*, in quanto di due nomi, o due parti tra lor incommensurabili composta. Alla terza, ed alla quarta, nel caso di esser positive dieder gli antichi italiani il nome di *reciso*, corrispondente a quello da Euclide usato di *apotome*, e significante l'effetto inesprimibile del rescindimento di una quantità da altra a quella incommensurabile. Nell' algebraico linguaggio odierno l'appellazion di *binomio* estendesi al complesso di due quantità qualunque, sieno anche tra loro commensurabili, ed ambedue razionali, e sieno o congiunte, o disgiunte, e a così dire l'una dall'altra recisa. Il vocabolo di *reciso* non si ode più. L'Eulero nei suoi *Elementi d'algebra*, capo VIII, prende di proposito a trattar *de l'extraction des racines quarrées des binomes*; ed incomincia con definire: *On nomme en algebre un binome une quantité composée de deux parties, qui sont ou tout affectées du signe de la racine quarrée, ou dont l'une au moins renferme ce signe*. Sotto la quale definizione nota quegli, che tradusse essi Elementi dalla lingua alemanna alla francese: *Quoique dans l'algebre on nomme en général binome une quantité composée de deux termes, Mr Euler a jugé à propos d'appeller ainsi en particulier les expressions que les analystes françois designent par quantités en parties commensurables et en parties incommensurables*. Questa appellazione francese, oltre che non abbraccia tutta la definizion di Eulero, è troppo lunga, e non bene conviene al genio del linguaggio algebraico, che cerca d'essere al possibile conciso e spedito. L'Eulero ha fatto fare al vocabolo *binomio* il primo passo retrogrado alla sua particolarità nativa. Sarebbe bene fargli fare il secondo, separandone l'idea di due quantità fra loro incommensurabili l'una dall'altra didotta, che l'Eulero vi lasciò compenetrata, riconfinandolo a significar non altro che il congiungimento di due quantità incommensurabili tra loro, e ritornando al disgiungimento di esse il suo distinto nome di *reciso*. E non mancherebbe altro vocabolo per significare in universale ampiezza il complesso di due quantità qualunque, e con qualunque segno tra loro. Il semplice vocabolo *bino* non potrebbe egli servire? e così *trino* in vece di *trinomio*, *quadrino* in vece di *quadrinomio*...? Abbiansi però questi in conto di riflessi ad occasion data gettati. La cosa di mio proposito, e di momento si è la via, che gli antichi italiani analisti tennero per estrarre la radice quadrata dai binomi e dai recisi, siccome richiedesi a render compiuta l'analisi delle equazioni proporzionali a quelle del secondo grado. Il dirò io: il si crederà egli, che la maniera loro fu più legittima, più retta, più elegante eziandío dell'odierna? Si darà il giudizio dopo che io le avrò poste a confronto. Adoperarono gli antichi, non come noi, uno, ma tre teoremi a base del metodo loro.

Teorema I. Qualunque sieno le quantità a, b il quadrato del binomio, o reciso $a \pm b$, è $a^2 \pm 2ab + b^2$.

Teorema II. La somma dei due quadrati $a^2 + b^2$ è maggior del rettangolo doppio $2ab$. L'eccesso anzi è uguale ad $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, ovvero $(b-a)^2$, cioè al quadrato dell'eccesso della quantità maggiore sopra la minore. Così è, a meno che a, b non sieno quantità immaginarie, che propiamente non meritano il nome di quantità, e delle quali non erasi sino a Fra Luca introdotta la considerazione, molto meno il computo cresciuto oramai a lussuria.

Teorema III. Il prodotto dei due quadrati l'uno in l'altro uguaglia la quarta parte del quadrato del doppio rettangolo, cioè $a^2 \times b^2 = \frac{(2ab)^2}{4} = a^2 b^2$.

Supposti questi teoremi, rappresenti $M \pm m$ un qualunque binomio, o reciso, concependo una almen delle quantità o M, od m irrazionale; ed elevate ambedue le quantità a quadrato, sia M la più potente, o sia quella, il cui quadrato possa, o vaglia più, ed m la meno potente. Chiameremo perciò M con gli antichi il nome, o co' moderni il termine maggiore, ed m il nome, o termine minore. Volendo da $M \pm m$ estrarre la radice quadrata, e supponendo questa rappresentata per $a \pm b$, ne segue dal teorema secondo, che il maggior nome M è quello che debbe comprender l'aggregato dei due quadrati $a^2 + b^2$, ed il minor nome m quello che pareggiar dèe il doppio rettangolo $2ab$. E per il terzo teorema s'inferisce, che il prodotto dei due quadrati $a^2 \times b^2$ deve uguagliarsi ad $\frac{1}{4} m^2$. Quindi componesi la regola.

Regola. Si divida il maggior termine in due parti, le quali moltiplicate fra loro producano la quarta parte del quadrato del nome minore; la somma delle radici di tali parti sarà la radice del proposto binomio; e la differenza la radice del reciso.

Ma quale sarà l'artifizio a dividere il maggior nome M in due parti, che adempiano la condizione stabilita? Qui è dove dopo la più grande giustezza si fa innanzi a splendere la più semplice eleganza del metodo. Per la v del II di Euclide dividendo una grandezza qualunque M in due parti uguali $\frac{1}{2} M, \frac{1}{2} M$, ed in due parti disuguali $\frac{1}{2} M + z$, $\frac{1}{2} M - z$, il prodotto di queste, più il quadrato della intermedia quantità z si uguagliano al quadrato della metà

$\frac{1}{2}M$; cioè $\left(\frac{1}{2}M+z\right)\left(\frac{1}{2}M-z\right)+z^2=\frac{1}{4}M^2$; quinci ne segue $z^2=\frac{1}{4}M^2-\left(\frac{1}{2}M+z\right)\left(\frac{1}{2}M-z\right)$. Ma questo prodotto delle parti sconosciute deve, per la condizione nella regola prescritta, essere $=\frac{1}{4}m^2$; dunque $z^2=\frac{1}{4}M^2-\frac{1}{4}m^2$; conseguentemente $z=\frac{1}{2}\sqrt{(M^2-m^2)}$; laonde per fine

$$\sqrt{(M\pm m)}=\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}M+\tfrac{1}{2}\sqrt{(M^2-m^2)}\right)}\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}M-\tfrac{1}{2}\sqrt{(M^2-m^2)}\right)}$$

formola che segnerò (A), e che, a esteso spiegare, vuol dire

Adempimento della prescritta regola. Dal quadrato del termine maggiore del proposto binomio, o reciso, si tolga il quadrato del termine minore; si prenda la metà della radice del residuo, e si aggiunga alla metà del termine maggiore, e si avrà la maggiore delle due parti cercate di esso termine maggiore; si sottragga la medesima metà della radice del residuo dalla metà del termine maggiore, e si otterrà di questo la cercata parte minore; per ultimo si piglino di queste parti del termine maggiore le radici, e congiungendole si conseguirà la desiderata radice del binomio $M+m$, disgiungendole la radice del reciso $M-m$.

La cosa riceverà lume vie più chiaro da un esempio. Abbiaci pertanto un problema condotti all'equazione $x^4-14x^2=63$. Si avrà per i primi atti analitici $x=\sqrt{(7\pm4\sqrt{7})}$. Per ultimo atto analitico si debbe effettuare la estrazione indicata della radice del binomio, e del reciso $7\pm4\sqrt{7}$.

Stando all'antica analisi dir dovrei sol del binomio $7+4\sqrt{7}$; poichè essendo il reciso $7-4\sqrt{7}$ negativo, e perciò divenendo la radice quadrata di esso immaginaria ed assurda, dovrebbesi rigettare, senza impiegarvi alcuna fatica. Ma si soddisfaccia eziandio al sottil genio dell'analisi moderna, che in alcuni casi con vantaggio adopera le radici immaginarie. Cominciamo dall'estrarre la radice quadrata dal binomio $7+4\sqrt{7}$. Essendo $(4\sqrt{7})^2=112>7^2=49$; dunque per il teorema secondo fingendo $a+b$ la radice quadrata di $7+4\sqrt{7}$, il termine maggiore $4\sqrt{7}$ sarà quello, che, quantunque irrazionale, converrà riguardare come l'aggregato dei due quadrati a^2+b^2, considerando quinci il termine minore 7 come uguale al doppio rettangolo $2ab$. Fatto pertanto, ad applicar la formola (A), $M=4\sqrt{7}$, $m=7$, si troverà

$$\sqrt{(7+4\sqrt{7})}=\sqrt{\left(2\sqrt{7}+\tfrac{1}{2}\sqrt{9\cdot7}\right)}+\sqrt{\left(2\sqrt{7}-\tfrac{1}{2}\sqrt{9\cdot7}\right)}=$$
$$\sqrt{\cdot\tfrac{7}{2}\sqrt{7}}+\sqrt{\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{7}}.$$

Procediamo alla immaginaria radice $\sqrt{(7-4\sqrt{7})}$. Si può questa risolvere nei due fattori $\sqrt{(4\sqrt{7})-7}\times\sqrt{-1}$: laonde l'affare riducesi ad estrar la radice quadrata dal reciso $4\sqrt{7}-7$, e moltiplicarla poi con $\sqrt{-1}$. Avremo dunque $\sqrt{(7-4\sqrt{7})}=\left(\sqrt{\cdot\tfrac{7}{2}\sqrt{7}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{7}}\right)\times\sqrt{-1}$.

Si è estratta la radice quadrata di un binomio avente il suo maggior termine irrazionale, ed il minor razionale, detto per ciò da Fra Luca dietro le distinzioni di Euclide *binomio secondo*: si è estratta una radice immaginaria, riducendone l'estrazione a quella della radice di un reciso di quantità razionale sottratta da una quantità irrazionale, chiamato, giusta le medesime euclidee distinzioni *reciso secondo*: ed ho a bello studio scelto una equazione, che portasse a tali estrazioni, onde manifesta risaltasse la discrepanza tra l'antico metodo, ed il moderno. Dovendosi estrarre la radice quadrata dal binomio $P+\sqrt{Q}$, si opera oggi così: Ponesi $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, onde quadrando ne viene l'equazione $P+\sqrt{Q}=x+y+2\sqrt{xy}$, la quale, per ragione di paragonare razionali a razionali, irrazionali ad irrazionali, si spezza nelle due $x+y=P$; $2\sqrt{xy}=\sqrt{Q}$, dalle quali quadrando ne nascono le due $x^2+2xy+y^2=P^2$; $4xy=Q$, e sottraendo questa da quella, proviene $x^2-2xy+y^2=P^2-Q$; e quinci, estraendo la radice, $x-y=\sqrt{(P^2-Q)}$; onde sommando con $x+y=P$, e da questa medesima sottraendo, ne risultano in ultimo

$$x=\frac{P+\sqrt{(P^2-Q}}{2},\quad y=\frac{P-\sqrt{(P^2-Q}}{2};$$

e perciò $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}=\sqrt{\frac{P+\sqrt{(P^2-Q)}}{2}}+\sqrt{\frac{P+\sqrt{(P^2-Q)}}{2}}$. Vedi Eulero *Elementi di algebra* §. 669 e seg.. Alcuni con il supposto $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ congiungono, come intrinsecamente ad esso legato, il supposto $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$, e moltiplicando l'una con l'altra queste due equazioni ne tirano immediatamente $\sqrt{(P^2-Q)}=x-y$, e terminan poi come testè si è mostrato. E quelli ancora, che a tal compendio della posizione $\sqrt{(P-\sqrt{Q})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ non valgonsi, la stabiliscono però come di sua natura in ogni caso la propria allo scioglimento di $\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$, e la corrispondente, anzi di necessità conseguente alla posizione $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$. Entriamo all'esame di questo moderno operare, e pensare. Posto primieramente $P=7$, $Q=112$, trovansi

$$x=\frac{7+\sqrt{(49-112)}}{2};\quad y=\frac{7-\sqrt{(49-112)}}{2}$$

e riducendo $x=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{-7}$; $y=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{-7}$; quinci $\sqrt{(7+\sqrt{112})}=\sqrt{\left(\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{-7}\right)}+\sqrt{\left(\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{-7}\right)}$. Sono qui dunque le parti della radice immaginarie; laddove con l'antico metodo da Fra Luca esposto a pagina 126 risultavano reali. E donde differenza cotanta? Dal tenersi nell'antico metodo ad inviolabil legge di prender per rappresentante della somma dei quadrati delle due parti della radice cercata il termine del proposto binomio più potente, ancorchè irrazionale, e dal prendersi nel moderno metodo, con legge diversa, a rappresentante di essa somma de' quadrati delle due parti della cercata radice il termine razionale, ancorchè meno potente. E qual di queste due leggi è la giusta, la conforme alla natura? La prima senza dubbio. Il fare la somma dei quadrati delle parti $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, cioè $x+y=P$, e il doppio rettangolo $2\sqrt{xy}=\sqrt{Q}$ nel caso, che P è minore di $\sqrt{Q}$ ripugna con l'essere reale di $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, e necessariamente le tramuta in immaginarie; onde maraviglia non è, che tali risultino. Le vere equazioni, e secondo natura sarebbero in tal caso le inverse $x+y=\sqrt{Q}$; $2\sqrt{xy}=P$, dalle quali, quadrando, si ha $x^2+2xy+y^2=Q$; $4xy=P^2$; e sottraendo $x^2-2xy+y^2=Q-P^2$; ed estraendo la radice, $x-y=\sqrt{(Q-P^2)}$; e sommando, e sottraendo questa da $x+x=\sqrt{Q}$, si ottengono

$$x=\frac{\sqrt{Q}+\sqrt{(Q-P^2)}}{2};\quad y=\frac{\sqrt{Q}-\sqrt{(Q-P^2)}}{2}$$

$\sqrt{(P+\sqrt{Q})}=\sqrt{\left(\sqrt{\tfrac{1}{4}Q}+\sqrt{\tfrac{1}{4}(Q-P^2)}\right)}+\sqrt{\left(\sqrt{\tfrac{1}{4}Q}-\sqrt{\tfrac{1}{4}(Q-P^2)}\right)}$. Nella qual formola sostituiti i valori $P=7$, $Q=112$, proviene

$$\sqrt{(7+\sqrt{112})}=\sqrt{\left(\sqrt{28}+\sqrt{15\tfrac{3}{4}}\right)}+\sqrt{\left(28-\sqrt{15\tfrac{3}{4}}\right)}=\sqrt{\left(2\sqrt{7}+\tfrac{1}{2}\sqrt{7}\right)}+\sqrt{\left(2\sqrt{7}-\tfrac{3}{2}\sqrt{7}\right)}=\sqrt{\tfrac{7}{2}\sqrt{7}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{7}}$$

risultato, e in totalità, e nelle parti, e nella natura, e nella forma, e nella grandezza di ciascuna affatto lo stesso che quello dell'antico metodo. E che! È egli dunque vizioso il metodo moderno? Non si può a meno di non riconoscerlo illegittimamente generalizzato, ed esteso dal suo al non suo caso. Giusto è nel caso di $P > \sqrt{Q}$; ma altrettanto alla natural maggioranza della somma de' quadrati sopra il doppio rettangolo delle parti ripugnante nel caso di $P < \sqrt{Q}$. Nè vale a spezzar la equazione $x + y + 2\sqrt{xy} = P + \sqrt{Q}$ nelle due $x + y = P$, $2\sqrt{xy} = \sqrt{Q}$ la ragione di uguagliar razionali a razionali, irrazionali ad irrazionali. E chi vi dice, che $x + y$ sia razionale, se ignota è la qualità, non meno che la quantità di x, di y, e sono appunto le qualità e le quantità loro le due cose che si cercano? L'unica cosa, che si sa, è, che $x + y$ deve essere $> 2\sqrt{xy}$, e questa scienza è propiamente quella, che regger debbe lo spezzamento dell'equazione $x + y + 2\sqrt{xy} = P + \sqrt{Q}$, spezzandola, non sempre a un modo, ma secondo i diversi casi diversamente, per uguagliar sempre $x + y$ a quello dei due termini P, $\sqrt{Q}$, che è il più potente, e $2\sqrt{xy}$ al termine meno potente. Il non distinguere i casi, il rendere generale ciò che di natura sua è particolare, conduce agli immaginarj. Ben però è vero, che sebbene immaginarie sieno le parti $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, la somma cionondimeno loro è reale, distruggendosi per la contrarietà de' segni i membri immaginarj, che involgono; lo che rendesi manifesto, se per mezzo della newtoniana formola svolgansi separatamente in serie i radicali $\sqrt{\left(\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{7}\right)}$, $\sqrt{\left(\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{7}\right)}$; indi si sommino insieme le due serie, poichè elisi per i contrarj segni i termini contenenti l'immaginario $\sqrt{-7}$, non resterà che la serie di reali termini:

$$2\left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{3^2}{2^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}} - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{3^4}{2^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{3}{2}}} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \cdot \frac{3^6}{2^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{5}{2}}} \cdots\cdots$$

Vero è altresì essere l'aggregato $\sqrt{\left(\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{-7}\right)}+\sqrt{\left(\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{-7}\right)}$ in quantità $=\sqrt{.\frac{7}{2}\sqrt{7}}+\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{7}}$, tuttochè le parti dell'uno, siccome in natura, così sieno in quantità differenti dalle parti dell'altro; formando i quadrati delle parti del primo la somma 7, e quelli delle parti del secondo la somma $4\sqrt{7}$, o sia $\sqrt{112}$, e reciprocamente risultando il doppio rettangolo delle parti prime $\sqrt{112}$, e il doppio rettangolo delle seconde 7; dalle quali cose apparisce tutt'insieme essere differenti le parti, e la stessa delle une e dell'altre la somma; poichè il quadrato di essa, che importa il congiungimento dei quadrati, e del doppio rettangolo delle parti, riesce sempre il medesimo. Ciò tutto vero; ma comecchè reale in fondo, e giusta in quantità la moderna radice, a chi piacer può l'immaginario suo aspetto, la composizion sua d'immaginarie parti a fronte di quella per l'antico metodo ricavata, di parti reali composta, senza bisogno d'essere in infinita serie svolta, dante a divedere la realità sua, quale, brevemente, in fondo, tale in aspetto? Resta a dire su la connessione, che concepir si suole tra la posizione $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$, e la posizione $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$, volendo, che la seconda sia della prima necessaria conseguenza. Per quanto all'intelletto mio si mostra, la connessione è naturale nel caso di $P>\sqrt{Q}$, poichè in tal caso $\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$ è non men reale, che $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$, e rappresentando in ambidue il termine $\sqrt{Q}$ il doppio rettangolo delle parti della radice, il diverso segno ad esso $\sqrt{Q}$ prefisso non può altro importare, che segno corrispondentemente diverso tra le parti della radice: laonde se $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$, per giusta, anzi necessaria conseguenza sarà $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$, e moltiplicando fra loro queste due equazioni ne verrà senza dubbio il prodotto $x-y=\sqrt{(P^2-Q)}$, essendo $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ nell'una e nell'altra equazione le stesse. Ma consideriamo il contrario caso di $P<\sqrt{Q}$; resta anche in questo $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$ reale, e posto $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$, il concetto, che subito la mente si forma di $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, parti della reale $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$, si è, che sieno esse pure ciascuna reali; e tali di fatto risultano adoperato il conveniente antico metodo per determinarle. All'opposto $\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$ è immaginario; e perciò fatto $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$, l'intelletto comprende tosto che $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, in quanto parti dell'immaginario $\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$, esser debbono immaginarie. Dunque per i primi concetti, che immediatamente per intrinseca necessità destano nell'animo le posizioni $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$, $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$, le $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ sono nell'una di esse di natura ben differente che nell'altra, tanto quanto dal reale è differente l'immaginario, di natura in somma onninamente contraria. E come dunque moltiplicando le due equazioni fra loro tirarne per prodotto $x-y=\sqrt{(P^2-Q)}$, non altrimenti che se le $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ fossero nelle due equazioni del tutto le medesime? Non è ciò incoerente, ripugnante? Mà andiamo più a fondo: cerchiamo, se le posizioni stesse sieno tra loro legate; se alla posizione $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$ sia nel caso $P<\sqrt{Q}$ conseguente la posizione $\sqrt{x}=\sqrt{y}=\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$. L'esempio della conseguenza dalla prima alla seconda posizione nel caso contrario $P>\sqrt{Q}$ non vale ad inferire per il caso $P<\sqrt{Q}$; poichè nel primo caso, reali essendo del pari $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$, e $\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$ si sta nella stessa natura di quantità; ma nel caso secondo, essendo $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$ reale, $\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$

immaginario, si passa da natura a natura diametralmente opposta, e si perde quel rapporto, quella ragione di conseguenza, che prima si aveva. E donde pertanto prender lume? Si risolva l'immaginario $\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$ ne' due fattori $\sqrt{-1} \times \sqrt{(\sqrt{Q}-P)}$, uno immaginario, l'altro reale. Si ponga $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(\sqrt{Q}+P)}$, concependo giusta l'antica legge esser $\sqrt{Q}$ la somma dei due quadrati di $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, e P il doppio loro rettangolo; sarà per legittima, anzi necessaria conseguenza $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{(\sqrt{Q}-P)}$. Ma $\sqrt{(P-\sqrt{Q})}=\sqrt{-1} \times \sqrt{(\sqrt{Q}-P)}$; dunque $\sqrt{-1} \times (\sqrt{x}-\sqrt{y})=\sqrt{-x}-\sqrt{-y}=\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$. Per la qual cosa uopo è conchiudere non esser la posizione $\sqrt{x}-\sqrt{y}= \sqrt{(P-\sqrt{Q})}$, nel caso $P<\sqrt{Q}$, ma sì la posizion $\sqrt{-x}-\sqrt{-y}=\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$ la di natura, e d'intrinseca necessità legata alla posizione $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$. E moltiplicando le due posizioni una con l'altra, non ne viene già il prodotto $x-y=\sqrt{(P^2-Q)}$, ma il prodotto $x\sqrt{-1}-y\sqrt{-1}=\sqrt{(P^2-Q)}$, il quale da sè, e tostamente manifestasi congruo, essendo l'un membro e l'altro, nel caso di che si tratta $P<\sqrt{Q}$, immaginario; laddove il prodotto $x-y=\sqrt{(P^2-Q)}$ appalesasi assurdissimo, uguagliandosi un reale ad un immaginario. Del rimanente dall'equazione di membri immaginarj $x\sqrt{-1}-y\sqrt{-1}=\sqrt{(P^2-Q)}= \sqrt{(Q-P^2)} \times \sqrt{-1}$, dividendo ambidue i membri per $\sqrt{-1}$, cavasi la equazione reale $x-y=\sqrt{(Q-P^2)}$, con la quale congiungendo l'altra $x+y=\sqrt{Q}$, sommando, e sottraendo, si determinano le espressioni di x ed y. Codesta equazione $x+y=\sqrt{Q}$ ottiensi elevando al quadrato l'equazione $\sqrt{-1}(\sqrt{x}-\sqrt{y})=\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$, e dopo l'elevazione che dà $-1(x-2\sqrt{xy}+y)=P-\sqrt{Q}$, spezzando questa resultante equazione nelle due $-x-y=-\sqrt{Q}$;

$+ 2\sqrt{xy} = P$. Elevando di nuovo a quadrato queste due, e sottraendo il quadrato della seconda del quadrato della prima, si ha $x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = Q - P^2$, o sia $x^2 - 2xy + y^2 = Q - P^2$, donde estraendo la radice proviene $x - y = \sqrt{(Q - P^2)}$, l'equazione stessa nata dalla moltiplica delle due posizioni l'una per l'altra. Ed osservisi ancora, che le tre equazioni $x + y = \sqrt{Q}$, $2\sqrt{xy} = P$, $x - y = \sqrt{(Q - P^2)}$ sono tutte e tre le medesime, che le superiormente, per il caso stesso $P < \sqrt{Q}$, con l'antica regola dedotte dalla posizione $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{(P + \sqrt{Q})}$. Tutto dunque concorda, e ciascuna posizione con la natura, e l'effetto del maneggio separato dell'una con l'effetto del maneggio separato dell'altra, e l'uno, e l'altro dei separati maneggi con il maneggio simultaneo, e composto di ambedue. Qual più luminosa prova di verità, e di intrinseco vincolo naturale? Cade in acconcio l'inserire un'altra avvertenza. Essendo $\sqrt{-1} \times (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \sqrt{-x} - \sqrt{-y}$, deve senza dubbio al quadrato della prima espressione, che è $-1 . (x - 2\sqrt{xy} - y)$, o sia $-x + 2\sqrt{xy} - y$, uguagliarsi il quadrato della seconda; il che non addiviene, fuor che, se moltiplicando l'immaginario $\sqrt{-x}$ per l'immaginario $\sqrt{-y}$, prendasi $\sqrt{-x} \times \sqrt{-y} = -\sqrt{xy}$, onde poi $\sqrt{-x} \times -\sqrt{-y} = +\sqrt{xy}$: cioè prodotto d'immaginario con immaginario richiede da sè, che al radicale prefiggasi il segno $-$. E di fatto non è egli $\sqrt{-x} = \sqrt{x} \times \sqrt{-1}$, $\sqrt{-y} = \sqrt{y} \times \sqrt{-1}$? Dunque $\sqrt{-x} \times \sqrt{-y} = \sqrt{x} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{y} \times \sqrt{-1} = \sqrt{x} \times \sqrt{y} \times (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{xy} \times -1 = -\sqrt{xy}$. Senza questa evidentissima regola, quadrando l'equazione $\sqrt{-x} - \sqrt{-y} = \sqrt{(P - Q)}$, si avrebbe $-x - 2\sqrt{xy} - y = P - \sqrt{Q}$, dal che, preso, nel caso $P < \sqrt{Q}$, $-x - y = -\sqrt{Q}$, resterebbe assurdamente $-2\sqrt{xy} = P$. Raccogliamo il frutto della disamina

Nel caso $P > \sqrt{Q}$

Sono naturalmente connesse fra loro le posizioni

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})} \ldots \sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$

Giusto è il prodotto $x-y=\sqrt{(P^2-Q)}$.

Retto lo spezzamento della quadrata equazion $x+y\pm 2\sqrt{xy}=P\pm\sqrt{Q}$ nelle due $x+y=P \ldots 2\sqrt{xy}=\sqrt{Q}$.

Legittima e congrua la formola di estrazione

$$\sqrt{(P\pm\sqrt{Q})}=\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}P+\tfrac{1}{2}\sqrt{(P^2-Q)}\right)}\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}P-\tfrac{1}{2}\sqrt{(P^2-Q)}\right)}$$

Ma nel caso $P<\sqrt{Q}$

Le posizioni naturalmente fra lor connesse sono

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})} \ldots \sqrt{-x}-\sqrt{-y}=\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$

Il prodotto loro $x\sqrt{-1}-y\sqrt{-1}=\sqrt{(P^2-Q)}$

Che si riduce ad $x-y=\sqrt{(Q-P^2)}$

La quadrata equazion della prima $x+y+2\sqrt{xy}=P+\sqrt{Q}$.

La quadrata equazion della seconda $-x-y+2\sqrt{xy}=P-\sqrt{Q}$.

Il retto spezzamento ad ambedue comune

$x+y=\sqrt{Q} \ldots 2\sqrt{xy}=P$

La formola di estrazione legittima e congrua

$$\sqrt{(P\pm Q)}=\sqrt{\pm\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{Q}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(Q-P^2)}\right)}\pm\sqrt{\pm\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{Q}-\tfrac{1}{2}\sqrt{(Q-P^2)}\right)}$$

Ma non piacerà forse ad alcuno, e non parragli al general genio dell'algebra conforme questo distinguer due casi, ed a ciascheduno in particolare assegnare la sua formola di estrazione, in luogo di comprenderli ambedue in una formola sola. E bene, ad appagare il genio della generalità rappresenti $\pm M \pm m$ un binomio e reciso qualunque positivo, o negativo, e rappresenti per conseguenza $\sqrt{(\pm M \pm m)}$ una radice qualunque o reale, o immaginaria da estraersi. Nel caso immaginario $\sqrt{(-M\pm m)}$ concepiscasi questo sciolto in $\sqrt{-1} \times \sqrt{(M \mp m)}$; vedesi, che ad aver la radice immaginaria altro non si ha a fare che moltiplicar per $\sqrt{-1}$, o render, di reali, immaginarie le parti della formola (A) superiormente con l'antico metodo cavata dalla v del II degli *Elementi* di Euclide. Rappresentando dunque M il termine maggiore, o razionale o irrazionale che sia, di un binomio, o reciso, ed m il termine minore, sarà in generale

$$\sqrt{(\pm M \pm m)} = \sqrt{\pm\left(\tfrac{1}{2} M + \tfrac{1}{2}\sqrt{(M^2 - m^2)}\right)} \pm \sqrt{\pm\left(\tfrac{1}{2} M - \tfrac{1}{2}\sqrt{(M^2 - m^2)}\right)}$$: formola che noto . . . (B).

Nel caso reale $\sqrt{(M \pm m)}$ si dovrà prendere sotto i segni radicali il segno $+$, e tra le radici il segno corrispondente a quello, che sta fra M, ed m; nel caso immaginario $\sqrt{(M \pm m)}$, del doppio segno sotto i radicali si ha a prendere il $-$, e dei due segni tra le radici il contrario a quello frapposto ad M ed m, o sia al prefisso ad m. A dimostrar l'utilità della formola, abbiasi per un problema $\sqrt{(7 + \sqrt{112})} - \sqrt{\cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{7}}$: si avrà, applicando al radicale $\sqrt{(7 + \sqrt{112})}$ la formola, $\sqrt{\cdot \tfrac{7}{2}\sqrt{7}} + \sqrt{\cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{7}} - \sqrt{\cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{7}} = \sqrt{\cdot \tfrac{7}{2}\sqrt{7}}$; laddove con il metodo di estrazione moderno si avrebbe $\sqrt{\left(\tfrac{7}{2} + \tfrac{3}{2}\sqrt{-7}\right)} + \sqrt{\left(\tfrac{7}{2} - \tfrac{3}{2}\sqrt{7}\right)} - \sqrt{\cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{7}}$. Avendo a sciogliere un'equazione dell'ottavo grado $x^8 \pm q x^4 \pm n = 0$, si ripeterà, se giudicherassi convenire, l'uso della formola (B), e per lo scioglimento dell'equazione di grado 16.° si tornerà a ripetere, e così via via per quelle equazioni della forma $x^{2m} \pm q x^m \pm n = 0$, nelle quali $2m$ sia una potenza qualunque h di 2, e la forma particolar delle quali sia conseguentemente $x^{2^h} \pm q x^{2^{h-1}} \pm n = 0$. I due problemi numerici simili, trattando i quali Fra Luca salì ad equazioni di ottavo grado, si comprendono in questo generale: trovare tre quantità x, y, z, che sieno in continua proporzione, e tali, che il prodotto della prima con la seconda xy sia $=f$, e moltiplicando per g la somma dei quadrati della prima, e della seconda, abbiasi $g(x^2+y^2)=z^2$ quadrato della terza. Dall'equazione $xy=f$ ne viene $y=\frac{f}{x}$, ed istituendo la proporzione continua $x:\frac{f}{x}::\frac{f}{x}:z$, si ricava $x=\frac{f^2}{x^3}$; onde dovendo essere $g(x^2+y^2)=z^2$, sarà $g\left(x^2+\frac{f^2}{x^2}\right)=\frac{f^4}{x^6}$, e togliendo le frazioni, $gx^8+gf^2x^4=f^4$; conseguentemente, sciogliendo $x=\sqrt{}\,.\sqrt{\left(-\frac{1}{2}f^2+\sqrt{\left(\frac{1}{4}f^4+\frac{1}{g}f^4\right)}\right)}=\sqrt{}\,.f\sqrt{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{4}{g}\right)}\right)}$, che posto $g=1$, si ridurrà ad $x=\sqrt{}\,.f\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)$. Se pongasi $g=3\frac{1}{5}$ proviene $x=\sqrt{\frac{1}{2}f}$, onde posto $f=8$, si ottiene $x=4$; ed a comprender tutta la sfera di simili casi, posto $f=2^{2r+1}$, con ritener $g=3\frac{1}{5}$, si conseguisce $x=2^r$. Il caso di $g=3\frac{1}{5}$, ed $f=8$ è uno dei trattati da Fra Luca, ed il caso di $g=1$, $f=10$ è l'altro. Se vogliasi in genere l'espressione di g, onde quadrato riesca $1+\frac{4}{g}$, suppongasi questa quantità $=t^2$, e troverassi $g=\frac{4}{t^2-1}$: così in luogo di $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{4}{g}\right)}\right)}$ si avrà $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right)}$, e desiderando anche $\frac{1}{2}+\frac{t}{2}$ quadrato, suppongasi $=u^2$, donde si ricaverà $t=2u^2+1$, e quinci $g=\frac{1}{\mu^4+u^2}$. Ogni qualvolta dunque si prenderà g di questa forma, resulterà $x=\sqrt{uf}$, e diverrà razionale, se uf sia un quadrato qualunque p^2. Non tralascierò di osservare, che si può trattar il problema senza salire ad una equazione di ottavo grado; poichè espresse per x, xr, xr^2 le tre quantità continuamente proporzionali cercate, attesa la condizione $g(x^2 + (xr)^2 = (xr^2)^2$, si ha immediatamente $g(1 + r^2) = r^4$, equazione di quarto grado solamente, che dà $r = \sqrt{\left(\frac{1}{2} g \pm \frac{1}{2} \sqrt{(g^2 + 4g)}\right)}$; ma per l'altra condizione $x \times xr = f$ si cade nella frazione $x = \frac{f}{\sqrt{\cdot}\sqrt{\left(\frac{1}{2} g \pm \frac{1}{2} \sqrt{(g^2 \pm 4g)}\right)}}$, onde manifestasi la ragione, per cui Fra Luca scielse l'altra strada.

§. IV. Sciogliendo al modo delle equazioni del secondo grado la proporzionale di sesto $x^6 \pm q x^3 \pm n = 0$, si trova $x^3 = \mp \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 \mp n\right)}$; e quinci $x = \sqrt[3]{\left(\mp \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 \pm n\right)}\right)}$. Siccome dunque le equazioni della forma $x^{2^h} \pm q x^{2^{h-1}} \pm n = 0$, richieggono a generale compiuta loro analisi la scienza di estrar la radice quadrata dal binomio, e reciso; non altrimenti le equazioni $x^6 \pm q x^3 \pm n = 0$, ed in universale della forma $x^{2^h \cdot 3^r} \pm q x^{2^{h-1} \cdot 3^r} \pm n = 0$ addomandano la scienza di estrarre dal binomio, o reciso, la radice cubica. Or ebbero eglino gli italiani analisti prima, o ne' tempi di Fra Luca artifizio per estrarla? Montucla nella parte III, lib. III, art. V, pag. 486, asserì su che *la maniere, que Bombelli enseigne, étoit déjà connue dès le tems de Lucas de Burgo*. Ma io non so trovare questa cognizione nel volume di Fra Luca, che tutti gli analitici lumi degli anteriori, e de' tempi suoi ivi raccolse. E per altra parte insegnando Bombelli non uno, ma due modi, il primo de' quali, ch'ei chiama di *pratica*, importa il risolvere un'equazion di terzo grado mista a tentone, l'altro, che del titolo di *regola* onora, comprende quella formola di risoluzione diretta delle equazioni miste di terzo grado, che *Cardanica* appellar si suole: come potè Montucla fingersi gli analisti del tempo di Fra Luca possessori dell'uno, o dell' altro, sia anche solo del primo, dopo avere scritto, che Fra Luca medesimo non estese la considerazione e l'algebrico maneggio al di là delle equazioni di secondo grado? Rispetto adunque alle equazioni $x^6 \pm q x^3 \pm n = 0$, il solo caso in potere dell'analisi fino al tempo di Fra Luca, fu quello, in cui $\frac{1}{4} q^2 \mp n$ sia quadrato, poichè, tramutandosi in tale ipotesi il binomio, o reciso, in un sol numero, l'ultimo atto analitico di esse equazioni riducesi all'estrazione della radice cubica numerica. Ma in verità delle equazioni medesime non trovo, nè tampoco per codesto semplice caso, esempio nell'opera di Fra Luca. E sarà appunto stato il prendere a trattarle, e scioglierle per esso semplice caso, ciò che fece l'ignoto autore di poi, ad esecuzion mandando l'avvertimento da Fra Luca stesso lasciato, di trasportar dalle equazioni proporzionali per lui sciolte di quarto ed ottavo grado alle altre di dignità qualunque quella analisi, che a tutte è comune; avvertimento, cui non ritenendo Cardano a mente, profuse a quell'ignoto autore di inventor la lode. Convien anche dire, che tal generale avvertimento fosse del pari sfuggito di memoria al Tartaglia, poichè nella storia del *Quesito XLII* fattogli *dall'honorando suo compare M. Ricardo Ventuorthe gentil'homo inglese* racconta con fasto, che l'anno 1536 la notte di San Martino *fantasticando in letto, quando non potea dormire, trovò la regola generale allo Capitolo de censo cubo, e cubi equal a numero, e similmente alli altri dui suoi compagni nella medesima notte*. E sì fatta regola generale altro non è che quella della risoluzione dei *capitoli* di secondo grado a codesti *capitoli* applicata; ad esempj della quale applicazione sceglie le tre équazioni $x^6 + 4 x^3 = 96$; $x^6 = 4 x^3 + 32$; $x^6 + 48 = 14 x^3$, le quali non solamente sono nel caso

$\frac{1}{4}q^2 \mp n$ quadrato, ma hanno inoltre x razionale, cioè la prima $x = \sqrt[3]{(2+10)} = 2$; la seconda $x = \sqrt[3]{(2+6)} = 2$; la terza $x = \sqrt[3]{(7+1)} = 2$. Quella maniera di trovare il lato cubico di un binomio, che Bombelli in fronte alla pagina 151 fregiò del titolo di *Regola*, fu prima insegnata dal Cardano nel capo XL dell'*Arte magna* nella seconda delle XL quistioni. Ma in luogo di svolgere il binomio dal radical cubico non fa che presentarlo diviso per 8 sotto lo stesso vincolo, accoppiargli similmente diviso ed involto il suo reciso, ed aggiugnergli un altro complicatissimo radicale. Ecco la regola

$$\sqrt[3]{(P+\sqrt{Q})} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{8}(P+\sqrt{Q})} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{8}(P-\sqrt{Q})} +$$
$$\sqrt{\left(\left(\sqrt[3]{\tfrac{1}{8}(P+\sqrt{Q})} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{8}(P-\sqrt{Q})}\right)^2 - \sqrt[3]{(P^2-Q)}\right)}.$$

Cardano nel capo XVII dell'*Arte magna dell'aritmetica* spiega un'altra maniera in parte a tentone un po migliore della pratica esposta dal Bombelli alla pag. 149 della sua algebra. Ma, oltre che tali modi sono contrarj al procedere certo, e diretto, che l'analisi ama, e vuole, l'uno e l'altro suppongono $\sqrt{(P^2-Q)}$ cubo perfetto, il che forma una condizione particolare, la quale non abbraccia, che una ristretta sfera di casi. Per le quali cose appalesasi quanto anche anche ai tempi del Tartaglia e del Cardano, e del Bombelli, dopo gli studj loro, restò l'analisi delle equazioni $x^6 \pm qx^3 \pm n = 0$ lontana dalla sua perfezione. Il Cardano di fatto nel capo XXIV de' 44 *Capitulis derivativis* dell'*Arte magna* data in luce in Pavia l'anno 1545, propostasi l'equazione $x^6 + 2x^3 = 10$, trattone $x = \sqrt[3]{(-1+\sqrt{11})}$, quivi arrestasi; e nel novello lavoro di essa *Arte magna*, stampato nel IV tomo di tutte le *Opere* l'anno 1663, trovasi nel capo XLI *De Capitulis derivativis, vel assimilatis* cangiata codesta equazione nella seguente $x^6 = 3x^3 + 10$, che dà $x = \sqrt[3]{(1\frac{1}{2} + \sqrt{12\frac{1}{4}})} = \sqrt[3]{(1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2})} = \sqrt[3]{5}$, cioè appartiene al caso $\frac{1}{4}q^2 \mp n$ quadrato. Il Bombelli dalla pagina 272 alla 280 della sua algebra alcune ne tratta fuori di questo caso, recandone l'analisi all'ultimo compimento. Ma son elleno di quelle, nelle quali n è un cubo, essendo esso n la differenza dei quadrati di $\frac{1}{2}q$, e di $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 \mp n)}$, cioè $+n = \frac{1}{4}q^2 - (\frac{1}{4}q^2 - n)$, ovvero $= \frac{1}{4}q^2 + n - \frac{1}{4}q^2$, che è quanto, giusta le espressioni generali poco sopra adoperate, $n = P^2 - Q$, ovvero $= Q - P^2$. Di tal sorta sono le equazioni $x^6 \mp 20x^3 = 8$; $x^6 + 8 = 40x^3$: a primiero scioglimento delle quali Bombelli giustamente assegna $x = \sqrt[3]{(\mp 10 + \sqrt{108})}$; $x = \sqrt[3]{(20 + \sqrt{392})}$; e per ultimo $x = \mp 1 + \sqrt{3}$; $x = 2 + \sqrt{2}$. Al Bombelli riuscito non sarebbe di compiere l'analisi dell'equazione $x^6 - 10x^3 = 2$, la quale però compiuta analisi ammette, ed è $x = \sqrt[3]{(5 + 3\sqrt{3})}$ $= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{3})$. Che direm di quelle equazioni della forma $x^{2m} \pm qx^m \pm n = 0$, nelle quali m comprenda a fattore il numero 5, il numero 7.... e la general in conseguenza compiuta analisi delle quali esiga l'estrazione della radice 5^a, 7^a.... de' binomi, o recisi? Di sì fatte equazioni, neppure in tutta la estensione del semplice caso, $\frac{1}{4}q^2 \mp n$ quadrato, furono gli analisti del tempo di Fra Luca in grado di ultimare lo scioglimento; ma solo allor quando segnata per A la radice del supposto quadrato $\frac{1}{4}q^2 \mp n$, la quantità $\mp\frac{1}{2}q \pm A$ fosse esatta potenza 5^a, 7^a.... di un numero semplice 1.2.3....9, ovvero di un decadico 10.100..; poichè mancavano agli aritmetici di quel tempo le regole generali per estrarre dai numeri la radice 5ª, 7ª ... discoperte poi dal Tartaglia. A non esagerare pertanto, ma ne' suoi termini di verità circoscriver con fede l'analitica scienza di Fra Luca, e de' suoi contemporanei algebristi intorno alle equazioni della forma $x^{2m} \pm q x^{m} \pm n = 0$, loro gloria si fu l'avere in generale veduta ed ingiunta a queste l'applicazione dello scioglimento delle equazioni di secondo grado a trarne $x = \sqrt[m]{\left(\mp \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 \mp n\right)}\right)}$, e di aver nel caso, che m sia 2, o non altro che una potenza di 2, saputo ultimare, e compiere lo scioglimento con un metodo sì naturale, sì legittimo, sì felice, che la moderna analisi sdegnar non debbe di adottarlo.

§. V. Ma se l'analisi moderna è in obbligo di ricevere dall'antica il metodo per estrarre dai binomi e recisi la radice quadrata, o in genere di ordine 2^k, ha però ella la moderna analisi con che riparare a fronte dell'antica alle sue glorie nell'arte di estrarre dai binomj, e recisi la radice cubica, la quinta, la settima, ed universalmente qualunque di ordine espresso per numero primo superiore al 2. Giacchè siamo in materia, illustriamola appieno, si unisca bellamente alla dottrina dell'analisi antica la dottrina della moderna, che a quella mancò, resti appagata la curiosità, che i tocchi di alcune cose nell'antecedente articolo avranno nel leggitore destata. Per estrarre la radice cubica da un binomio $P + \sqrt{Q}$, bisogna supporre, che sia egli un perfetto cubo; ma infinite possono essere le combinazioni delle grandezze di P e Q, per le quali il binomio $P + \sqrt{Q}$ non sia cubo: allora la radice cubica di esso è impossibile, e vana fatica il cercarla. Il concetto, che $P + \sqrt{Q}$, essendo P razionale, sia cubo, guida immediatamente a definire di qual forma esser debba la sua radice cubica. Ella non può esser della forma $\sqrt{p}+\sqrt{q}$, perchè $(\sqrt{p}+\sqrt{q})^3$ darebbe due parti irrazionali differenti, ed irreducibili ad una, laddove non ne ha che una il binomio $P+\sqrt{Q}$. La radice cubica di questo binomio aver non può che le due seguenti forme: 1.ª $p+\sqrt{q}$; 2.ª $(p+\sqrt{q})\sqrt[3]{m}$. Supponiamo in primo luogo, che abbia la forma 1.ª, che sia cioè $P+\sqrt{Q}=(p+\sqrt{q})^3=p^3+3p^2\sqrt{q}+3pq+q\sqrt{q}$. Paragonando razionali a razionali, irrazionali ad irrazionali, ne nascono le due equazioni:

1.ª $P=p^3+3pq$ . . . . . 2.ª $\sqrt{Q}=(3p^2+q)\sqrt{q}$:

quadrandole, e di poi sottraendo la 2.ª dalla 1.ª trovasi

$$P^2-Q=p^6-3p^4q+3p^2q^2-q^3=(p^2-q)^3;$$

donde imparasi, che qualora $P+\sqrt{Q}$ sia un cubo perfetto, ed abbia la radice della forma $p+\sqrt{q}$, la differenza de' quadrati de' suoi termini P^2-Q è pure un perfetto cubo $=(p^2-q)^3$. Poniamo $p^2-q=\sqrt[3]{(P^2-Q)}=F$, ne verrà $q=p^2-F$, e sostituendo questa espressione di q nella prima equazione $P=p^3+3pq$, ne resulterà l'equazion di condizione

$$(E) \qquad 4p^3-3Fp-P=0.$$

La chiamo l'equazion di condizione, poichè supposto, che $P+\sqrt{Q}$ sia cubo, ed abbia la radice della forma $p+\sqrt{q}$, dovendo essere p quantità razionale, per conseguenza l'equazion (E) deve ammettere un valore di p, che sia razionale. O dunque si verificherà tal condizione, e saranno insieme veri ambidue i supposti, che sia $P+\sqrt{Q}$ cubo perfetto, e sia la radica cubica di lui della forma $p+\sqrt{q}$; o la condizione non si verifica, ed almeno il secondo supposto sarà falso. Tutto ciò dunque, che si ha a fare, è di cercar se l'equazione (E) abbia radice razionale; poichè avendola, essa sarà il desiderato valore di p. Se non sieno per sorte F, P divisibili per 4, si ponga $p=\frac{\pi}{2}$, con che l'equazione (E) si trasformerà nella

$$(\varepsilon)\qquad \pi^3-3F\pi-2P=0.$$

Dovendo essere razionale p, lo dovrà essere parimenti π, e si investigherà se lo sia, trovando, giusta che insegna la moderna analisi, tutti i divisori e semplici, e composti di $2P$, ed esaminando, se alcuno di loro sia atto ad effettuar l'equazione, adoperato a rendere l'esame spedito ed agevole alcuno degli inventati sussidj, tra' quali sopra ogni altro elegante, e naturale mi sembra quello dall'abate Venini esposto nel capo I, art. 17 della sua Teoría delle equazioni in appendice ai suoi *Elementi di algebra*. Il divisore di $2P$, che sostituito in luogo di π effettui l'equazione (ε) sarà l'opportuno valore di π, dal quale si avrà $p=\frac{\pi}{2}$; ed ottenuto p si ricaverà $q=p^2-F$.

Ad esempio si cerchi $\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})}$. Essendo $P=2$, $Q=5$, si ha $P^2-Q=4-5=-1$ perfetto cubo, la cui radice $=-1=F$. Onde l'equazion (E) diviene $4p^3+3p-2=0$, e l'equazion (ε) $\pi^3+3\pi-4=0$, la quale si effettua posto $\pi=1$ uno dei divisori di 4: dunque $\pi=1$, $p=\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$, $q=p^2-F=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$; e perciò $\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Supponiamo ora, che P^2-Q non sia cubo, e che ciononostante lo sia $P+\sqrt{Q}$, ne seguirà quinci, che la radice cubica di questo binomio, in vece della forma $p+\sqrt{q}$, avrà la forma $(p+\sqrt{q})\sqrt[3]{m}$. Fatta $\sqrt[3]{(P+\sqrt{Q})}=(p+\sqrt{q})\sqrt[3]{m}$, operando come sopra si troverà $P=m(p^3+3pq)$, $\sqrt{Q}=m(3p^2+q(\sqrt{q}$, $P^2-Q=m^2(p^2-q)^3$, che dimostra non essere P^2-Q cubo. Ma dividendo dall'una, e dall' altra parte per m^3 ne proviene $\frac{P^2 - Q}{m^3} = (p^2 - q)^3$, che insegna dover esser cubo $\frac{P^2 - Q}{m^3}$. Trattasi adunque di prender per m^3 una quantità tale, che $\frac{P^2 - Q}{m^3}$ divenga cubo perfetto; il chè è sempre possibile a fare, poichè quand'altra quantità minore non si trovasse a ciò acconcia, lo sarà $m^3 = \frac{1}{(P^2 - Q)^2}$. Siasi dunque assegnato ad m un valor qualunque a tal uopo soddisfacente, il quale in generale si rappresenti per $\frac{1}{a}$, e pongasi $\sqrt[3]{a^3 (P^2 - Q)} = p^2 - q = F'$, onde $q = p^2 - F$. Sostituendo questa espression di q, ed il valor $\frac{1}{a}$ assegnato ad m nell'equazione $P = m(p^3 - 3pq)$ ne nasce l'equazion di condizione

$$(E') \qquad 4p^3 - 3F'p - aP = 0;$$

e fatto $p = \frac{\pi'}{2}$ si ha (ε') $\pi'^3 - 3F'\pi' - 2aP = 0$.
Trovato con il metodo de' divisori di $2aP$ il valore razionale di π', se l'equazion (ε') ammette razional radice, si avrà $p = \frac{1}{2}\pi'$, e quinci $q = p^2 - F' = \frac{1}{4}\pi'^2 - F'$, e finalmente

$$\sqrt[3]{(P + \sqrt{Q})} = \left(\tfrac{1}{2}\pi' + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\pi'^2 - F'\right)}\right) . \sqrt[3]{\tfrac{1}{a}} \quad \ldots (C).$$

Questa formola, che ho segnato (C) può servire ad ambidue i casi: ponendo mente di fare $a = 1$, allor quando $P^2 - Q$ è per sè un cubo perfetto, e, allor che non lo è, di prender per a una quantità tale, che $a^3 (P^2 - Q)$ diventi cubo.

Per esempio debbasi estrarre $\sqrt[3]{(5 + 3\sqrt{3})}$. Confrontando si ha $P = 5$, $\sqrt{Q} = 3\sqrt{3}$; onde $P^2 - Q = 25 - 27 = -2$, che non è cubo, ma lo diviene moltiplicando per 4, essendo $4 \times -2 = -8 = (-2)^3$; dunque $a^2 = 4$, $a = 2$, $F' = -2$, per le quali cose l'equazione (ε') diviene $\pi'^3 + 6\pi' - 20 = 0$, la qual si effettua per $\pi' = 2$ divisor di 20. Dunque $\sqrt[3]{(5 + 3\sqrt{3})} = (1 + \sqrt{(1 + 2)}) \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = (1 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Se dato ad a il valore idoneo a render $a^2(P^2 - Q)$ cubo, la equazione (ε') non abbia radice razionale, si conchiuda non essere $P + \sqrt{Q}$ un cubo, ed essere inutile cercarne la radice cubica. Propongasi ad esempio $\sqrt[3]{(3 + \sqrt{19})}$: trovasi $P^2 - Q = 9 - 19 = -10$ che non è cubo, ma preso $a^2 = 10^2$, si ottiene $a^2(P^2 - Q) = 10^2 \times -10 = -1000 = (-10)^3$, $F' = -10$, e l'equazione (ε') $\pi'^3 + 30\pi' - 60 = 0$, la quale non si può per alcun dei divisori di 60 effettuare, e conseguentemente non ha radice razionale: dunque $3 + \sqrt{19}$ non è un cubo, nè si può assegnarne radice cubica esatta, e l'equazione $x^6 = 6x^3 + 10$ sciolta in $x = \sqrt[3]{(3 + \sqrt{19})}$ non è capace di ulterior analisi. Similmente dicasi dell'equazione $x^6 + 4x^3 = 6$, dalla quale tratto $x = \sqrt[3]{(-2 + \sqrt{10})}$ non è permesso di andare con esatta estrazione più avanti, non essendo $-2 + \sqrt{10}$ cubo. Non resta dunque in tali casi che il proceder per approssimazione, cercar cioè la radice cubica del cubo via via più prossimo alla quantità $-2 + \sqrt{10}$, o in genere alla quantità $P + \sqrt{Q}$, con incominciare ad estrarre la radice quadrata prossima di $\sqrt{Q}$, e poi passando ad estrarre la radice cubica prossima della somma di essa, e di P. Intorno a codeste due equazioni, o sia intorno al binomio $3 + \sqrt{19}$, ed al reciso $-2 + \sqrt{10}$ da esse provenienti esperimentò inutilmente Bombelli la *Pratica* sua: e veramente riguardo a tal binomio, e tal reciso, la colpa era per parte loro in realtà mancanti di cubica radice; ma inutilmente del pari avrebbe Bombelli tentato intorno a qualunque binomio, o reciso avente sua cubica radice della forma $(p + \sqrt{q})\sqrt[3]{m}$, e ciò per colpa propria della *Pratica* a tal caso non estendentesi, del pari che la maniera adoperata prima dal Cardano nel capo XVII dell'*Arte magna dell'aritmetica*. Del rimanente questa maniera di Cardano è fondata su le due equazioni $q = p^2 - F = p^2 - \sqrt[3]{(P^2 - Q)}$, e $4p^3 - 3Fp - P = 0$. Richiede espressamente Cardano, che $P^2 - Q$ sia un cubo, e arriva a dire, che se ciò non sia, il binomio $P + \sqrt{Q}$ non ha radice cubica; questo è il primo difetto della sua dottrina limitantesi in conseguenza al solo primo dei due casi dalla moderna analisi distinti. Il secondo difetto è il procedere a tentone nel cercare per mezzo dell'equazione $4p^3 - 3Fp - P = 0$ il valore di p. Vi ha però nel processo dello ingegno. Disposta l'equazion come segue, $p^3 = \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}Fp$, è chiaro, che $p^3 > \frac{1}{4}P$. Quinci ingiugne Cardano di cercar un numero cubico $> \frac{1}{4}P$, e tale, che preso quattro volte si uguagli a P accresciuto del prodotto di $3F$ nella radice cubica di lui: questa radice cubica sarà il valor di p, col mezzo del quale si determinerà poi $q = p^2 - F$. Ciò vale supposta F, cioè $\sqrt[3]{(P^2 - Q)}$ positiva. Se sia negativa, dall'equazione $p^3 = \frac{1}{4}P - \frac{3}{4}Fp$ apparisce esser $p^3 < \frac{1}{4}P$; laonde prescrive Cardano di andare in tal caso cercando un numero cubico $< \frac{1}{4}P$, e tale che moltiplicato per 4 si uguagli a P diminuito del prodotto di $3F$ nella radice cubica di lui. Se esempigrazia addomandisi $\sqrt[3]{(45 + \sqrt{1682})}$, poichè si ha $\sqrt[3]{(P^2 - Q)} = \sqrt[3]{(2025 - 1682)} = \sqrt[3]{343} = 7 = F$, $q = p^2 - 7$, $p^3 = \frac{45}{4} + \frac{21}{4}p$, vedesi che il numero cubico prossimamente $> \frac{45}{4}$ è 27, e provando riesce $4 \cdot 27 = 45 + 21 \cdot \sqrt[3]{27}$; dunque $p = \sqrt[3]{27} = 3$, $q = 3^2 - 7 = 2$, e $\sqrt[3]{(45 + \sqrt{1682})} = 3 + \sqrt{2}$. E se chieggasi $\sqrt[3]{(38 + \sqrt{1445})}$, avendosi $\sqrt[3]{(P^2 - Q)} = \sqrt[3]{(1444 - 1445)} = -1 = F$, $q = p^2 - F = p^2 + 1$, $p^3 = \frac{38}{4} - \frac{3}{4}p$, è facile scorgere che il numero cubico prossimamente $< \frac{38}{4}$ è 8, e provando si ottiene $4 \cdot 8 = 38 - 3 . \sqrt[3]{8}$, per conseguenza $p = \sqrt[3]{8} = 2$, $q = 4 + 1 = 5$, $\sqrt[3]{(45 + \sqrt{1445})} = 2 + \sqrt{5}$. Non sempre il numero cubico prossimamente maggiore, o prossimamente minore ad $\frac{1}{4} P$ sodisfarà; ma intanto dai due addotti esempj si scorge, che in molti casi codesta maniera di Cardano può riuscire ugualmente, ed anche più, spedita che la moderna dei divisori di $2 P$, e massimamente allor quando $\sqrt[3]{(P^2 - Q)}$ è negativa, trattandosi in tal caso di non provare, che i numeri cubici minori di $\frac{1}{4} P$, che saran pochi, se non sia P estremamente grande. Bombelli nella sua *Pratica* riduce l'estrazione della radice cubica da $P + \sqrt{Q}$ al problema di trovare due quantità, una razionale p, l'altra irrazionale $\sqrt{q}$, tali, che $p^2 - q - \sqrt[3]{(P^2 - Q)} = F$ numero, e $p^3 + 3 p q = P$. Questa seconda equazione è la prima delle due, nelle quali sul principio di questo articolo si è spezzata l'equazione $P + \sqrt{Q} = p^3 + 3 p^2 \sqrt{q} + 3 p q + q \sqrt{q}$. L'operare di lui è il seguente: finge ad arbitrio il valor di p, e quinci per l'equazione $q = p^2 - F$ deduce il corrispondente di q, poi sostituendoli ambidue nell'equazione $p^3 + 3 p q = P$, guarda, se questa si verifichi. Ad esempio sia il $P + \sqrt{Q}$, dal quale estrar si deve la radice cubica, il binomio $26 + \sqrt{675}$, che dà $\sqrt[3]{(P^2 - Q)} = \sqrt[3]{(676 - 675)} = 1 = F$, $p^2 - 1 = q$, $p^3 + 3 p q = 26$: posto $p = 1$ ne verrebbe $q = 0$, onde non serve; posto $p = 3$, ne resulta $q = 8$, e $27 + 72 = 26$; il che è falso; si ponga $p = 2$, sarà $q = 3$, $8 + 18 = 26$ equazione verissima: dunque $p = 2$, $q = 3$, $\sqrt[3]{(26 + \sqrt{675})} = 2 + \sqrt{3}$. Apparisce, che il procedere di Bombelli è più a tentone di quello di Cardano. La maniera di estrazione da Cardano insegnata nella seconda delle 40 quistioni del capo XL dell'*Arte magna dell'aritmetica* è composta delle due equazioni $q = p^2 - \sqrt[3]{(P^2 - Q)} = p^2 - F$, e $p^3 - \frac{3}{4} Fp = \frac{1}{4} P$, ma questa seconda equazione, in luogo di essere sciolta a tentone, è sciolta con il metodo generale dell'analisi delle equazioni di terzo grado ad essa simili, cioè del secondo termine mancanti. Per tal metodo si ha

$$p = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8} P + \sqrt{\left(\frac{1}{8^2} P^2 - \frac{1}{4^3} F^3\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8} P - \sqrt{\left(\frac{1}{8^2} P^2 - \frac{1}{4^3} F^3\right)}\right)}$$

Questo binomio cubico esprimente il valore di p chiamisi A, sarà $q = A^2 - F$, e $\sqrt[3]{(P + \sqrt{Q})} = A + \sqrt{(A^2 - F)}$, la qual espressione, conceputo in luogo di A il binomio cubico, in luogo di F il suo valore $\sqrt[3]{(P^2 - Q)}$, comprendesi di qual complicazione riesca. Ma il peggio si è, che una formola sì complicata non è di alcuna utilità, non ha significato veruno, e non è che un illusorio svisamento di $\sqrt[3]{(P + \sqrt{Q})}$. E vaglia il vero, rimettendo nel binomio cubico A in luogo di F^3 il suo valore $P^2 - Q$, e riducendo, trovasi $A = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(P + \sqrt{Q})} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{(P - \sqrt{Q})}$, ed $A^2 - F = \frac{1}{4}\sqrt[3]{(P + \sqrt{Q})^2} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{(P - \sqrt{Q})^2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{(P^2 - Q)} - \sqrt[3]{(P^2 - Q)} = \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{(P + \sqrt{Q})} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{(P - \sqrt{Q})}\right)^2$; onde $\sqrt{(A^2 - F)} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(P + \sqrt{Q})} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{(P - \sqrt{Q})}$; conseguentemente $A + \sqrt{(A^2 - F)} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(P + \sqrt{Q})} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{(P - \sqrt{Q})} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{(P + \sqrt{Q})} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{(P - \sqrt{Q})} = \sqrt[3]{(P + \sqrt{Q})}$. Cardano, e Bombelli non si avvisarono di questa trasformazione vana, ed illusione, perchè maneggiando numeri, ed adempiendo tosto le operazioni indicate per $\frac{1}{8} P$, $\frac{1}{8^2} P^2$, $\frac{1}{4^3} F^3$ o sia $\frac{1}{4^3}(P^2 - Q)$, svanirono dagli occhi loro i numeri primitivi P, Q. Considerando però le maniere loro, conceder si debbe ad essi la lode di averle piantate su quei fondamenti stessi, su quelle equazioni medesime, su le quali la moderna maniera è costrutta, e solo mancò ad esso loro il metodo dei divisori per determinare con passo diretto, e certo il valore della parte razional p della desiderata cubica radice.

Procediamo ad estrarre dal binomio $P+\sqrt{Q}$ la radice quinta, settima, ed in genere qualunque, il cui grado si esprima per numero primo al 3 superiore. Si denoti generalmente cotal numero primo per u, e pongasi $\sqrt[u]{(P+\sqrt{Q})}=p+\sqrt{q}$, si avrà $P+\sqrt{Q}=(p+\sqrt{q})^u$, e svolgendo

$$P+\sqrt{Q}=p^u+u\,p^{u-1}\sqrt{q}+\frac{u.(u-1)}{1.2}p^{u-2}q+\frac{u.(u-1).(u-2)}{1.2.3}p^{u-3}q\sqrt{q}+\frac{u.(u-1).(u-2).(u-3)}{1.2.3.4}p^{u-4}q^2+\frac{u.(u-1).(u-2).(u-3).(u-4)}{1.2.3.4.5}p^{u-5}q^2\sqrt{q}+\frac{u.(u-1).(u-2).(u-3).(u-4).(u-5)}{1.2.3.4.5.6}p^{u-6}q^3+\ldots\ldots$$

E spezzando in due, con uguagliar razionali a razionali, irrazionali ad irrazionali, ne proverrano le due equazioni

$$1.^a\quad P=p^u+\frac{u.(u-1)}{1.2}p^{u-2}q+\frac{u.(u-1).(u-2).(u-3)}{1.2.3.4}p^{u-4}q^2+\ldots$$

$$2.^a\quad \sqrt{Q}=u\,p^{u-1}\sqrt{q}+\frac{u.(u-1).(u-2)}{1.2.3}p^{u-3}q\sqrt{q}+\frac{u.(u-1).(u-2).(u-3).(u-4)}{1.2.3.4.5}p^{u-5}q^2\sqrt{q}+\ldots.$$

Quadrando l'una e l'altra di queste due equazioni, e sottraendo la seconda dalla prima, si troverà

$$P^2-Q=p^{2u}-u\,p^{2u-2}q+\frac{u.(u-1)}{1.2}p^{2u-4}q^2-\frac{u.(u-1).(u-2)}{1.2.3}p^{2u-6}q^3+\frac{u.(u-1).(u-2).(u-3)}{1.2.3.4}p^{2u-8}q^4-\ldots.=(p^2-q)^u.$$

Vi ha però più spedita via per trovar $P^2-Q=(p^2-q)^u$. Posto $\sqrt[u]{(P+\sqrt{Q})}=p+\sqrt{q}$, si può conseguentemente porre $\sqrt[u]{(P-\sqrt{Q})}=p-\sqrt{q}$, non cadendo qui, dove u è numero primo superiore al 2, per conseguenza dispari, i riflessi fatti nel paragrafo III relativamente alla radice quadrata. Or $\sqrt[u]{(P+\sqrt{Q})}\times\sqrt[u]{(P-\sqrt{Q})}=\sqrt[u]{(P^2-Q)}$, e $(p+\sqrt{q})\times(p-\sqrt{q})=p^2-q$; dunque $\sqrt[u]{(P^2-Q)}=p^2-q$, $P^2-Q=(p^2-q)^u$. Facciasi $\sqrt[u]{(P^2-Q)}=F$, ne verrà $q=p^2-F$, $q^2=(p^2-F)^2=p^4-2Fp^2+F^2$, $q^3=(p^2-F)^3=p^6-3p^4F+3p^2F^2-F^3$...., sostituite queste espressioni di q, e delle sue potenze nell'equazione 1.ª, non resterà in essa altra incognita che p, la quale esser dovendo razionale nei supposti, che $P+\sqrt{Q}$ sia perfetta potenza di grado u, ed abbia la radice della forma $p+\sqrt{q}$, ne segue, che la medesima equazione 1.ª divenga l'equazion di condizione, e nella verità dei supposti aver debba radice razionale, da trovarsi con il metodo dei divisori dell'ultimo termine, e il cui valore sarà il cercato valore di p, il quale poi condurrà a conoscere quello di $q=p^2-F$.

Che se, nè sia P^2-Q una potenza perfetta di grado u, nè l'equazione in p ammetta radice razionale, non perciò sarà lecito conchiudere, che $P+\sqrt{Q}$ non sia esatta potenza di grado u, e manchi di radice di questo grado, potendola avere della forma $(p+\sqrt{q})\sqrt[u]{m}$. Ponendo $\sqrt[u]{(P+\sqrt{Q})}=(p+\sqrt{q})\sqrt[u]{m}$, e congiuntamente $\sqrt[u]{(P-\sqrt{Q})}(p+\sqrt{q})\sqrt[u]{m}$, con moltiplicare fra loro queste due pozizioni resulta $\sqrt[u]{(P^2-Q)}=(p^2-q)\sqrt[u]{m^2}$, e quindi $P^2-Q=(p^2-q)^u$. m^2, $\frac{P^2-Q}{m^2}=(p^2-q)^u$, cioè $\frac{P^2-Q}{m^2}$ debbe esser potenza perfetta di grado u; e fa in conseguenza mestieri assegnar ad m^2 un valor tale, che verifichi questa condizione: il che sarà sempre conceduto di adempiere, prendendo alla peggio $m^2 = \frac{1}{P^2 - Q^{u-1}}$. Si denoti per $\frac{1}{a^2}$ il valore assegnato ad m^2, e pongasi $\sqrt[u]{a^2(P^2-Q)} = F'$; indi $q = p^2 - F'$. Da $\sqrt[u]{(P+\sqrt{Q})} = (p+\sqrt{q})\sqrt[u]{m} = (p+\sqrt{q})\sqrt[u]{\frac{1}{a}}$ ne segue $a(P+\sqrt{Q}) = (p+\sqrt{q})^u$, e svolgendo, e separando i termini razionali, ne proviene l'equazion di condizione in p,

$$a\,P = p^u + \frac{u.(u-1)}{1.2}p^{u-2}.q + \frac{u.(u-1).(u-2).(u-3)}{1.2.3.4}p^{u-4}.q^2 + \ldots$$

La quale non differisce da quella per il primo caso, che nell'avere il termine noto P moltiplicato per a, e corrispondentemente diverso da F il valor F' nella espressione di $q = p^2 - F'$, della quale in essa equazione sostituir si debbono le potenze. E similmente, che nel primo caso, operando, si otterranno p, q.

Quanto si è detto rispetto al binomio $P+\sqrt{Q}$, vale riguardo al reciso $P-\sqrt{Q}$, qualunque sia la radice, o cubica, o di altro grado espresso per numero primo superiore, che estrar si debba, e non meno se sia $P < \sqrt{Q}$, che essendo $P > \sqrt{Q}$; non cadendo in tali radici l'immaginario, e legittima universalmente essendo la conseguenza dalla posizione $\sqrt[u]{(P+\sqrt{Q})} = p+\sqrt{q}$ ovvero $(p-\sqrt{q})\sqrt[u]{m}$ alla posizione $\sqrt[u]{(P-\sqrt{Q})} = p-\sqrt{q}$ ovvero $(p-\sqrt{q})\ \sqrt[u]{m}$; e le equazioni medesime risultando dalla seconda, che dalla prima, le determinazioni stesse stessissime di p, q; onde non resta, che prender, nel caso della estrazione dal reciso, $-\sqrt{q}$ in luogo di prender $+\sqrt{q}$.

Quantunque la pienezza della analitica scienza, la generale compiuta risoluzione delle equazioni $x^{2m} \pm q\,x^m \pm n = 0$ richieda, che si possegga l'arte di estrarre dal binomio, e dal reciso una radice di grado qualsiasi; ciononostante sarà per la pratica averne abbondantemente l'aver pronti i modi delle estrazioni delle radici quadrata, cubica, quinta, settima; poichè supponendo $m=5$, $=7$ semplicemente, si ascende già al 10°, al 14° grado, e combinando a fattori di m qualunque potenza di 2 qualunque di 3, qualunque di 5, qualunque di 7, si sale ad un'altezza illimitata, e fuori di uso. Di queste quattro radici pertanto a comodo dell'analista io raccoglierò qui in una tavola la estrazione, o le equazioni per effettuarla.

Dovendo estrarre da $\pm P \pm \sqrt{Q}$ la radice quadrata dinotato per M, delle due quantità P, $\sqrt{Q}$ la più potente, per m la meno, sarà

$$\sqrt{(M \pm m)} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} M + \tfrac{1}{2}\sqrt{(M^2 - m^2)}\right)} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} M - \tfrac{1}{2}\sqrt{(M^2 - m^2)}\right)}$$

$$\sqrt{(-M \pm m)} = \sqrt{-\left(\tfrac{1}{2} M + \tfrac{1}{2}\sqrt{(M^2 - m^2)}\right)} \mp \sqrt{-\left(\tfrac{1}{2} M - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(M^2 - m^2\right)}\right)}$$

Dovendo da $\pm P \pm \sqrt{Q}$ estrarre la radice cubica, supposto $a^2(P^2 - Q)$ un perfetto cubo $=\phi^3$, si cerchi la radice razionale dell'equazione $\Pi^3 - 3\phi\Pi - 2aP = 0$; si prenda poi $p = \frac{1}{2}\Pi$, indi $q = p^2 - \phi$, e sarà

$$\sqrt[3]{(\pm P \pm \sqrt{Q})} = (\pm p \pm \sqrt{q}) \sqrt[3]{\tfrac{1}{a}}.$$

Si darà dapprima ad a il valor 1, e non riuscendo $P^2 - Q$ perfetto cubo, si passerà ad assegnarle altri valori, e tornando i tentativi inutili, si farà $a = (P^2 - Q)$, onde $(P^2 - Q)^2 (P^2 - Q) = \phi^3$. Se ad onta di aver ottenuto $a^2(P^2 - Q)$ cubo, e ϕ numero, l'equazione $\Pi^3 - 3\phi\Pi - 2aP = 0$ non ha radice razionale, la quantità $\pm P \pm \sqrt{Q}$ non è cubo, ed è impossibile assegnarne radice cubica esatta.

Dovendo da $\pm P \pm \sqrt{Q}$ estrarre la radice di quinto grado, supposta $a^2(P^2 - Q)$ una potenza perfetta di quinto grado $=\phi^5$, si cerchi la radice razionale dell'equazione

$\Pi^5 - 5\phi\,\Pi^3 + 5\phi^2\,\Pi - 2aP = 0$, si prenda $p = \frac{1}{2}\Pi$, $q = p^2 - \phi$, e sarà

$$\sqrt[5]{(\pm P \pm \sqrt{Q})} = (\pm p \pm \sqrt{q})\sqrt[5]{\frac{1}{a}}.$$

Si fara dapprima $a = 1$, poi, alla peggio, $= (P^2 - Q)^4$.

Dovendo da $\pm P \pm \sqrt{Q}$ estrarre la radice di 7° ordine, supposta $a^2(P^2 - Q)$ potenza perfetta di 7° grado $= \phi^7$, cerchisi la radice razionale dell'equazione $\Pi^7 - 7\phi\,\Pi^5 + 14\phi^2\,\Pi^3 - 7\phi^3\,\Pi - 2aP = 0$; preso $p = \frac{1}{2}\Pi$, $q = p^2 - \phi$ sarà

$$\sqrt[7]{(\pm P \pm \sqrt{Q})} = (\pm p \pm \sqrt{q})\sqrt[7]{\frac{1}{a}}.$$

Farassi dapprima $a = 1$, poi, alla peggio, $= (P^2 - Q)^3$.

Mi lusingo, che gli analisti di questa stagione accoglieranno con aggradimento la scelta dell'antico metodo per l'estrazione della radice quadrata, o in genere di grado 2^h, e del moderno per la estrazione della radice di grado qualunque espresso per numero dispari e primo, con la unione loro a formare un corpo interamente legittimo, e sano.

§. VI. Nel paragrafo XI del capo IV si è per me fatto vedere, come Euclide ne' suoi Dati scioglie per via geometrica le equazioni di secondo grado, riuscirà a chi ama conoscere le più antiche origini delle scoperte, e i varj sentieri che sa aprirsi l'umano ingegno, di grata maraviglia il contemplare come il greco Geometra nei suoi Dati medesimi sciolga le equazioni di quarto grado $x^4 + qx^2 - n = 0$. Nei Dati LXXXVI, LXXXVII insegna Euclide, che se due rette z, y sotto un angolo dato A (*Fig.* 7) comprendano uno spazio parallelogrammo di grandezza data, che segneremo a^2, cioè se sia $zy\,\text{sen.}\,A = a^2$, ed inoltre sia $z^2 - b^2 : y^2 :: h^2 : 1$, essendo b^2, h^2 superficie date, verranno ad esser date le due rette z, y. Il filo della dimostrazione di Euclide è questo. Si faccia a b^2 un rettangolo uguale, uno de' cui lati sia z, il che si otterrà per la proporzione $z : b :: b : \frac{b^2}{z}$; su la retta adunque x si tagli la porzione $= \frac{b^2}{z}$, e sarà la rimanente $z - \frac{b^2}{z}$, il rettangolo $z \cdot \frac{b^2}{z} = b^2$ sarà dato, e cangiandosi $z^2 - b^2$ in $z^2 - z \cdot \frac{b^2}{z} = z\left(z - \frac{b^2}{z}\right)$, sarà data la ragione $z\left(z - \frac{b^2}{z}\right) : y^2 :: h^2 : 1$. Per la condizione zy sen. $A = a^2$, si ha $zy = \frac{a^2}{\text{sen.}\, A}$; e quinci $\frac{a^2}{\text{sen.}\, A} \cdot b^2 :: zy : z \cdot \frac{b^2}{z} :: y : \frac{b^2}{z}$; conseguentemente $\frac{a^4}{\text{sen.}^2 A} : b^4 :: y^2 : \frac{b^4}{z^2}$. Moltiplicando questa per la proporzione $h^2 : 1 :: z\left(z - \frac{b^2}{z}\right) : y^2$ nasce $\frac{a^4 h^2}{\text{sen.}^2 A} : b^4 :: z\left(z - \frac{b^2}{z}\right) : \frac{b^4}{z^2}$; onde anche $\frac{4 a^4 h^2}{\text{sen.}^2 A} : b^4 :: 4z^2 - 4z \cdot \frac{b^2}{z} : \frac{b^4}{z^2}$; e componendo $\frac{4 a^4 h^2}{\text{sen.}^2 A} + b^4 : b^4 :: 4z^2 - 4z \cdot \frac{b^2}{z} + \frac{b^4}{z^2} : \frac{b^4}{z^2} :: \left(2z - \frac{b^2}{z}\right)^2 : \frac{b^4}{z^2}$; ed estraendo le radici $\sqrt{\left(\frac{4a^4 h^2}{\text{sen.}^2 A} + b^4\right)} : b^2 :: 2z - \frac{b^2}{z} : \frac{b^2}{z}$; e di nuovo componendo $\sqrt{\left(\frac{4a^4 h^2}{\text{sen.}^2 A} + b^4\right)} + b^2 : b^2 :: 2z : \frac{b^2}{z}$; $\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^4 h^2}{\text{sen.}^2 A} + b^4\right)} + \frac{1}{2} b^2 : b^2 :: z : \frac{b^2}{z} :: z \cdot \frac{b^2}{z} : \frac{b^4}{z^2} :: b^2 : \frac{b^4}{z^2}$; laonde novellamente estraendo le radici $\sqrt{\left(\frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^4 h^2}{\text{sen.}^2 A} + b^4\right)}\right)} : b :: b : \frac{b^2}{z}$; moltiplicando sì questa, che la proporzion $\frac{a^2}{\text{sen.}\, A} : b^2 :: y : \frac{b^2}{z}$ con la proporzione $b^2 : \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^4 h^2}{\text{sen.}^2 A} + b^4\right)} :: \frac{b^2}{z} : z$ provengono le due $\sqrt{\left(\frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^4 h^2}{\text{sen.}^2 A} + b^4\right)}\right)} : \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^4 h^2}{\text{sen.}^2 A} + b^4\right)} :: 1.$

$z\ \frac{a^2}{\text{sen.}\, A} : \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^4 h^2}{\text{sen.}^2 A} + b^4\right)} :: y : z$; invertendo la seconda, e moltiplicando con la prima, resulta $\sqrt{\left(\frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^4 h^2}{\text{sen.}^2 A} + b^4\right)}\right)} : \frac{a^2}{\text{sen.}\, A} :: 1 : y$; onde al fin ricavasi

$$z = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1}{2} \sqrt{\left(\tfrac{4 a^4 h^2}{\text{sen.}^2 A} + b^4\right)}\right)}$$

$$y = \frac{a^2}{\text{sen. } A} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1}{2} \sqrt{\left(\tfrac{4 a^4 h^2}{\text{sen.}^2 A} + b^4\right)}\right)}}$$

Se in questa espressione del valor di y si moltiplichino e numeratore, e denominatore per $\sqrt{\left(-\tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1}{2} \sqrt{\left(\tfrac{4 a^4 h^2}{\text{sen.}^2 A} + b^4\right)}\right)}$, e si riduca, trovasi

$$y = \frac{\sqrt{\left(-\tfrac{1}{2} b^2 + \sqrt{\left(\tfrac{4 a^4 h^2}{\text{sen.}^2 A} + b^4\right)}\right)}}{h}.$$

L'algebra speditamente dalle due equazioni date $z y$ sen. $A = a^2$; $z^2 - h^2 y^2 = b^2$ con trasportar dalla prima nella seconda l'espressione di $y = \frac{a^2}{z \text{ sen. } A}$ forma l'equazione $z^4 - b^2 z^2 - \frac{a^4 h^2}{\text{sen.}^2 A} = 0$, e risolvendola, ottiene $z^2 = \frac{1}{2} b^2 + \sqrt{\left(\frac{4 a^4 h^2}{\text{sen.}^2 A} + b^4\right)}$, e quindi $y^2 = \frac{z^2 - b^2}{h^2} = \frac{-\frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{4 a^4 h^2}{\text{sen.}^2 A} + b^4\right)}}{h^2}$; o viceversa, con trasportare dalla prima delle date equazioni nella seconda la espressione di $z = \frac{a^2}{y \text{ sen. } A}$, formata l'equazione $y^4 + b^2 y^2 - \frac{a^4}{\text{sen.}^2 A} = 0$, conseguisce prestamente, risolvendola, il valor di y^2, e da esso quello di z^2, ed in seguito quelli di z, y. Contengono dunque i Dati di Euclide LXXXVI e LXXXVII la risoluzione di due equazioni comprese in uno nella forma $x^4 \pm q x^2 - n = 0$. Nel Dato LXXXVI Euclide prende h^2 in concetto indeterminato e generale, nel Dato LXXXVII gli assegna il valore $= 1$. Pretende Davide Gregori, che quel Dato leggasi da noi diverso da quello, che lo stese Euclide, e che in luogo della condizione, che io ho espresso nella proporzion $z^2 - b^2 : y^2 :: h^2 : 1$, Euclide supponesse data l'uguaglianza $b^2 - y^2 = z^2$. Bisognerebbe immaginar di troppo cangiato il testo di Euclide, e quanto riuscirebbe importuno il citare a base della dimostrazione la 11ª delle definizioni ai dati premesse, *magnitudo magnitudine major est, data magnitudine, quam in ratione, quando, ablata data, reliqua ad eandem habet rationem datam:* il significato della quale ottimamente rappresentasi per la proporzione $z^2 - b^2 : y^2 :: h^2 : 1$; altrettanto in Euclide, contro suo severo tenore, desidererebbesi il vero fondamento della dimostrazione del Dato. Senza pertanto attribuire ad Euclide la risoluzione dell'equazion $z^4 - b^2 z^2 + \frac{a^4}{\text{sen.}^2 A} = 0$, ovvero $y^4 - b^2 y^2 + \frac{a^4}{\text{sen.}^2 A} = 0$, che si ricaverebber dalle due condizioni $z\, y\, \text{sen.}\, A = a^2$; $b^2 - y^2 = z^2$, e che spetterebbero alla forma $x^4 - q\, x^2 + n = 0$, basta alla gloria del greco Geometra l'aver dimostrato la determinazione degli sconosciuti valori involti nelle equazioni delle forme $x^4 \pm q\, x^2 - n = 0$. Il confronto della greca geometrica analisi, e dell'analisi algebraica, manifesta lo squisito ragionar di quella, l'agile operar di questa.

§. VII. Non sono le equazioni di forma $x^{2m} \pm q\, x^m \pm n = 0$ le sole equazioni al secondo grado superiori, alle quali l'analisi si estende nel Volume di Fra Luca; una pure nella Distinzione 1I se ne rincontra prematuramente trattata e sciolta di quarto grado, e di cinque termini, appartenente alla forma $x^4 + m\, x^3 + p\, x^2 + q\, x - n = 0$. Nasce l'equazione da Fra Luca maneggiata dal seguente problema, che ei si propone a pag. 44. Supposto, che il circuito del terrestre equatore sia di miglia 20400, e che da un punto di esso partano due viaggiatori, o due mobili, per farne il giro, andando l'uno da occidente in oriente con viaggio ogni giorno maggiore in progressione aritmetica, sì che il viaggio del 1.° giorno sia un miglio soltanto, il viaggio del 2.° giorno di due miglia, il viaggio del 3.° di tre miglia, e così via via; andando l'altro per l'opposto da oriente in occidente con viaggi diurni successivamente crescenti, siccome i cubi de' numeri, cioè con viaggio il giorno 1.° di un miglio, il 2.° di 8 miglia, il 3.° di 27, il 4.° di 64 . . . . si cerca dopo quanti giorni s'incontreranno. Chiamato x il numero ignoto de' giorni, il viaggio del primo viaggiatore totale sarà la somma della progressione $1 . 2 . 3 . 4 \ldots . x = (x+1) \times \frac{x}{2} = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x$, ed il viaggio totale del viaggiator secondo sarà la somma della serie $1 . 8 . 27 . 64 . 125 \ldots . . x^3 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 (x+1)^2 = \frac{1}{4} x^4 + \frac{2}{4} x^3 + \frac{1}{4} x^2$: i due viaggi insieme giunti debbono uguagliare il circuito dell'equatore; dunque $\frac{1}{4} x^4 + \frac{2}{4} x^3 + \frac{3}{4} x^2 + \frac{2}{4} x = 20400$. Togliendo le frazioni si ha $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x = 81600$. Ma come ricavare il valore di x? Si aggiunga all'uno, ed all'altro membro 1, e si avrà nel primo un perfetto quadrato $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 81601$; onde estraendo la radice, ne proviene $x^2 + x + 1 = \sqrt{81601}$, e quinci per la risoluzione delle equazioni di secondo grado $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{-3}{4} + \sqrt{81601}\right)}$. Tal è lo scioglimento del problema esibito da Fra Luca. Tartaglia lo accusa di errore, pretendendo, che il tempo cercato x, dopo il quale i due viaggiatori s'incontreranno, non possa risultar espresso per una quantità irrazionale, ma sì per un numero di giorni con rotto, e sia precisamente di giorni $16 \frac{1768}{4930}$; il che prova con il seguente calcolo. In giorni 16 il primo viaggiatore avrà fatto miglia $(1+16) \times \frac{16}{2} = 17 . 8 = 136$, nel giorno 17.° dovrebbe fare miglia 17: dunque nella parte di esso giorno $\frac{1768}{4930}$ farà, per la regola aurea, miglia $\frac{1768 \times 17}{4930}$; il viaggiator secondo nei sedici giorni avrà fatto miglia $(1+16)^2 \times \left(\frac{16}{2}\right)^2 = 17^2 . 8^2 = 136^2 = 18496$, nel giorno 17.° far dovrebbe miglia $17^3 = 4913$, dunque nella parte di esso giorno $\frac{1768}{4930}$ farà per geometrica proporzione miglia $\frac{1768 \times 4913}{4930}$: per le quali cose in giorni 16 $\frac{1768}{4930}$ la somma de' viaggi sarà $136 + 18496 + \frac{1768 \times 17}{4930} = \frac{1768 \times 4913}{4930} = 18632 + \frac{1768}{4930} \times 4930 = 18632 + 1768 = 20400$. Ma dai viaggi, che i due viaggiatori farebbero nell'intero giorno 17.°, è egli giusto, e di dovere l'argomentare in geometrica proporzione i viaggi fatti nell'assegnata parte $\frac{1768}{4930}$ di esso giorno? Il così argomentare importa il concepire, che i due viaggiatori farebbero dal principio al fine del medesimo giorno il viaggio loro con moto uniforme; e poichè non vi ha maggior ragione, che ciò avvenga nell'ultimo giorno, che negli altri antecedenti, bisognerebbe concepire, che ogni giorno dal primo all'estremo istante camminassero con passo invariato; ma nel passaggio da un giorno all'altro di salto accelerassero il passo, il primo viaggiatore in progressione aritmetica naturale, il secondo nella progressione de' numeri cubici. Per esempio sarebbe mestieri immaginare, che il primo viaggiatore, dopo aver nel corso del terzo giorno fatte con passo equabile miglia 3, di salto nel cominciare del quarto giorno passasse da una celerità, come 3, ad una celerità come 4, per fare nel corso del quarto giorno miglia 4; e similmente si dica del secondo viaggiatore: dovrebbesi in lui concepire nel corso del terzo giorno una celerità costante sufficiente a fare miglia 27, ed all'entrare nel quarto giorno il salto dalla celerità come 27 alla celerità come 64, per fare nel corso del quarto giorno con uniforme cammino miglia 64. Per lo che, ecco in ciascheduno dei due viaggiatori due leggi differenti di viaggio: l'una rispetto al viaggio di ogni giorno; l'altra rispetto ai viaggi de' diversi giorni: di uniformità la prima nel succedersi delle 24 ore del giorno; di acceleramento per salto la seconda nel succedere dell'uno all'altro giorno. Per lo contrario il calcolo di Fra Luca suppone, che ciascuno de' viaggiatori faccia il viaggio suo secondo una legge sola, e la stessa da giorno a giorno, e da ora a ora, anzi dalla menoma alla menoma parte del giorno; cioè, che il primo viaggiatore dal primo all'ultimo istante del suo viaggiare acceleri continuamente il passo in progressione aritmetica naturale, ed il secondo continuamente in progressione de' numeri cubici: poichè nelle espressioni $(1+x)\times\frac{x}{2}$, $(1+x)^2\times\left(\frac{x}{2}\right)^2$ dei viaggi fatti nel tempo x, la specie x è affatto indeterminata, e significa ugualmente una, quanto si voglia, piccola parte del primo giorno, uno, o più giorni interi, ed un misto di questi, e della parte di altro giorno imperfetto. A veder più chiaramente la differenza dei due supposti, si cerchino i viaggi de' due viaggiatori dopo giorni $3\frac{1}{2}$. Sarà, giusta il computo di Tartaglia, il viaggio del primo $=1+2+3+\frac{4}{2}=8$, ed il viaggio del secondo $=1+8+27+\frac{64}{2}=68$ miglia; ma per la formola $(1+x)\times\frac{x}{2}$, conforme al computo di Fra Luca, sarà, posto $x=3\frac{1}{2}$, il viaggio del primo viaggiatore $=\left(1+3\frac{1}{2}\right)\times\frac{7}{4}=\frac{9}{2}\times\frac{7}{4}=7\frac{7}{8}$; ed il viaggio del secondo, per la formola $(1+x)^2\times\left(\frac{x}{2}\right)^2$, $=\left(\frac{9}{2}\right)\times\left(\frac{7}{4}\right)^2=62\frac{1}{64}$. Dettraendo da questo viaggio del secondo viaggiatore in giorni $3\frac{1}{2}$ il viaggio di lui in giorni $3=1+8+27=36$, restano miglia $26\frac{1}{64}$ per il viaggio da esso fatto nella metà prima del quarto giorno seguendo la legge, che i viaggi nelle successive parti del giorno crescano in progressione dei numeri cubici, non altrimenti che i viaggi nei successivi giorni, e miglia $37\frac{63}{64}$ gli rimarrebbero a fare nell'altra metà di esso quarto giorno; laddove con il cammino uniforme, che nel corso del giorno suppone Tartaglia, nella prima e nella seconda metà del quarto giorno ugualmente le miglia riescon $32=\frac{64}{2}$. La semplice ipotesi di Fra Luca gode il pregio di attenersi alla legge di continuità, ed è l'unica via, la condizion necessaria a sciogliere direttamente, e con passo certo il problema; nella doppia ipotesi di Tartaglia non si può sciogliere che a tentone: Fra Luca intese, e sciolse il problema nel senso, e nel modo, in cui da noi s'intenderebbe e sciorrebbe; e noi non possiamo condannarlo. Vero è, che si cade nell'incomodo di trovare il tempo x irrazionale; incomodo, che si schiva nel metodo di Tartaglia; ma tale irrazionalità del tempo non reca difficoltà a chi ben conosce il significato di essa, e la natura del tempo. È il tempo una quantità continua, siccome in geometría si concepisce la linea, anzi è il tempo l'esser reale, che al concetto geometrico serve di base; la continuità reale nel tempo, come la conceputa nella linea, esclude la distinzione reale e il numero determinato delle parti, e importa la divisibilità all'infinito; conseguenza della quale è la capacità dei rapporti irrazionali. La irrazionalità, sotto cui resulta il tempo dell'incontro dei due viaggiatori, altro non vuol dire, se non che un tal tempo ha un rapporto per numeri inesprimibile al tempo di un giorno; ma ciò non toglie, che sia un tempo di determinata grandezza, e da certi limiti circoscritto, siccome la diagonale del quadrato non ha rapporto per numeri esprimibile al lato, avvegnachè sia di determinata lunghezza. Rimane dunque Fra Luca purgato dall'accusa di errore appostagli da Tartaglia, e riman dimostrato aver lui con quello stesso spirito di analisi, che oggi ci guiderebbe, sciolto un problema di equazione di quarto grado di tutti i suoi termini fornita. Il caso è semplicissimo; ma appalesa, che si conosceva la composizione della quarta potenza del binomio, e l'addizione di 1 per condurre a perfetta potenza di quarto grado l'aggregato dei quattro termini contenenti l'incognita è il primo lampo dell' artificio generale, a cui poi si fece progresso, dell'addizione di noto, e di ignoti termini.

§. VIII. Offre il Volume di Fra Luca eziandío problemi *esponenziali*, e non soltanto dei semplici, ne' quali la incognita sta unicamente in esponente, ma dei più composti ancora, ne' quali sta tutt'insieme ad esponente, e coefficiente. Serva di esempio il problema 8.° nel trattato 7.° *De viagiis* della Distinzione IX. Uno fa alquanti viaggi, e quanti viaggi fa, tanti scudi seco porta nel primo viaggio, e ad ogni viaggio li raddoppia, ed alla fine de' suoi viaggi trovasi avere scudi 30: qual è il numero de' viaggi, e degli scudi nel primo portati? Intendesi facilmente l'equazione del problema essere $x\,2^x = 30$. Frate Luca pone successivamente $x = 1$, $= 2$, $= 3$, $= 4$: posto $x = 3$ risulta 24, meno del dovere; posto $x = 4$ resulta 64, troppo. Si faccia dunque, prescrive egli, $x = 3 + y$, e si avrà al fine del primo viaggio $6 + 2y$, al fine del secondo $12 + 4y$, al fine del terzo $24 + 8y$, e si avrebbe al fine del quarto viaggio $48 + 16y$, così che l'aumento degli scudi per il quarto viaggio intero sarebbe $24 + 8y$: si argomenti proporzionalmente $1 : 24 + 8y :: y : 24y + 8y^2$, e sarà questo l'aumento degli scudi per una parte y del quarto viaggio, il quale aggiunto al numero degli scudi risultato al fine del terzo $24 + 8y$, ne proverrà l'equazione $8y^2 + 32y + 24 = 30$, onde $y = -2 + \sqrt{4\frac{3}{4}}$, ed $x = 1 + \sqrt{4\frac{3}{4}}$. Apparisce, che la via da Fra Luca battuta in questo problema è quella stessa da Tartaglia seguíta nel problema, di cui ho parlato nel paragrafo superiore. Ingiustamente là Tartaglia censurò Frate Luca; qui cadeva la censura; ma non potea il Tartaglia farla senza sentirne sopra di sè il riverbero. Il valore $x = 1 + \sqrt{4\frac{3}{4}}$ non soddisfa all'equazione $x\,2^x = 30$, poichè adoperando i logaritmi trovasi log. $\left(1 + \sqrt{4\frac{3}{4}}\right) + \left(1 + \sqrt{4\frac{3}{4}}\right)$ log. $2 =$ log. $28,8$ in vece di log. 30; onde rendasi manifesto essere $x = 1 + \sqrt{4\frac{3}{4}}$ difettoso. Ad una più facile, e più evidente prova della falsità del metodo pigliamo $2\frac{1}{2} \cdot 4^{2\frac{1}{2}} = 80$, essendo $4^{2\frac{1}{2}} = 4^{\frac{5}{2}} = 2^5 = 32$, e perciò $2\frac{1}{2} \cdot 4^{2\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2} \cdot 32 = \frac{5}{2} \cdot 32 = 5 \cdot 16 = 80$. Supponendo ignoto l' $\frac{1}{2}$ cerchiamolo con il detto metodo prendendo $2 + y$, si avrà $(2 + y) \cdot 4 = 8 + 4y$; $(8 + 4y) \cdot 4 = (2 + y) \cdot 4^2 = 32 + 16y$; $(32 + 16y) \cdot 4 = (2 + y) \cdot 4^3 = 128 + 64y$, e l'aumento da $(2 + y) \cdot 4^2$ a $(2 + y) \cdot 4^3$, $= (2 + y) \cdot 4^3 - (2 + y) \cdot 4^2 = 96 + 48y$; onde, se argomentar vogliasi in proporzione geometrica, si trova per l'aumento nell'esponente della frazione y l'aumento $96y + 48y^2$, e così $(2 + y) \cdot 4^{2+y} = 32 + 16y + 96y + 48y^2$, che, dovendo esser $= 80$, dà l'equazione $48y^2 + 112y + 32 = 80$, dalla quale si trae $y = \frac{-7 + \sqrt{85}}{6}$, valore alquanto minor di $\frac{1}{2}$, poichè a fare $\frac{1}{2}$ converrebbe, che sotto il segno radicale in luogo di 85 si contenesse $100 = 10^2$. Ma noi stessi manchiamo di un metodo diretto, ed esatto per isciogliere le equazioni della forma $x\,a^x = h$. L'artificio dei logaritmi ci suggerisce il passo $L.\,x + x\,L.\,a = L.\,h$; ma non ci è dato di procedere direttamente più avanti, ed è mestieri volgersi alla doppia falsa posizione, la quale la prima volta ci lascia ben lontani dal vero, e non è che ripetendola più, e più volte, che al vero ci accosti via via, senza speranza però di toccarlo, ed ottenerlo esattamente. La regola di doppia falsa posizione si applica la prima volta senza bisogno dello svolgimento logaritmico, ponendo x uguale a due numeri interi differenti tra loro dell'unità; ma l'uso della formola logaritmica diviene di sommo vantaggio, anzi necessaria, nelle successive applicazioni di essa regola. Nell'esempio dell'equazione $x\,4^x = 80$, poichè posto $x = 2$ si ha $2 \cdot 4^2 = 32 = 80 - 48$; e posto $x = 3$ ne viene $3 \cdot 4^3 = 192 = 80 + 112$, per la regola di doppia falsa posizione dovrebbe esser $x = \frac{3 \times 48 + 2 \times 112}{48 + 112} = \frac{368}{160} = 2\frac{1}{3}$, il qual valore è più lontano dal vero $2\frac{1}{2}$, che il valore per il metodo di Fra Luca ritrovato $\frac{-7 + \sqrt{85}}{6}$. E sebbene la differenza da $2\frac{1}{3}$ a $2\frac{1}{2}$, che è di $\frac{1}{6}$, non sembri gran cosa in sè medesima, la è però nell'equazione $x\,4^x = 80$, grande differenza producendo nel valore di $x\,4^x$. A ciò vedere, chiamata in sussidio la formola logaritmica, si troverà $L.\,2\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3}\,L.\,4 = 0,\,8679767 + 1,\,4048067 = 1,\,7727834 = L.\,59,\,263$, il qual numero ben si vede quant'è distante da 80; il difetto non è nullameno che 20, 737. Combinando questo difetto vegnente dal porre $x = 2\frac{1}{3}$ con l'eccesso 112 venuto dal porre $x = 3$, la regola di falsa posizion doppia esibisce $x = \frac{3 \times 20,737 + 112 \times 2\frac{1}{2}}{20,737 + 112} = 2,437$, il qual valore, sebben non manchi che di 0,063 dal vero valore di $x = 2,500$, pure cagiona in $x 4^x$ un difetto di 8,538 trovandosi L. $2,437 + 2,437$ L. $4 =$ L. $71,462$ in luogo di L. 80. Così proseguendo a combinare l'errore del nuovo resultato con l'error del resultato della posizione $x = 3$, si va ognor restrignendo il limite del difetto; ma è d'uopo ripeter per ben otto volte la regola per giugnere ad avere $x = 2,4997$, che produce 79,957 mancante da 80 di 0,043. E combinando questa mancanza con l'eccesso 112, per la regola di doppia falsa posizione resulta $x = \frac{3 \times 0,043 + 2,4997 \times 112}{0,043 + 112} = 2,5008$, cioè il valor di x salta dal difetto all'eccesso. Questo eccesso, che non è che di 0,0008, produce in $x 4^x$ l'eccesso di 0,114 resultando L. $2,5008 + 2,5008$ L. $4 =$ L. $80,114$. Si hanno però con le posizioni $x = 2,4997$; $x = 2,5008$ il difetto, e l'eccesso ristretti ai limiti 0,043; 0,114. Facendo di questi la combinazione si ottiene $x = \frac{2,5008 \times 0,043 + 2,4997 \times 0,114}{0,043 + 0,114} = 2,5000013$, che eccede il vero valor di $x = 2,5$ soltanto di 0,0000013, e produce 80,000148, il cui eccesso è solo di 0,000148. Con due altre rinovazioni della regola di doppia falsa posizione, cioè alla duodecima applicazione di essa si ritrova $x = 2,50000001$, eccedente il vero valore di x solamente di 0,00000001, e producente in $x 4^x$ il solo eccesso 0,00000109 dando 80,00000109. Ma per quanto si continui l'operazione, avverrà egli bene, che l'eccesso, ed il difetto, se vogliasi, discenda via via ad una piccolezza quasi impercettibile, e per numeri inesprimibile, non però mai che si annienti del tutto, ed esatto ne esca il valor di x, e quello in conseguenza di $x 4^x = 80$: e ciò per la ragione spiegata nella *Storia dell'aritmetica* nell'Appendice al cap. su la regola di doppia falsa posizione, dove anche ho stesamente esposto il calcolo qui compendiato. Gli antichi italiani analisti erano esercitatissimi nell'artificio della doppia falsa posizione, e ben ne intendevano la intima natura. Ma per ciò appunto giudicar doveano i problemi esponenziali fuori della sfera dei problemi, ai quali esso propriamente si limita. Per altra parte, mancando dell'ajuto dei logaritmi, non erano in grado di dar la prova al valore dalla regola di doppia falsa posizione esibito, nè di riconoscere, molto meno, che con ripeterla riesce di approssimarsi sempre più al vero valore. Nel problema di Fra Luca, che come ho detto riducesi all'equazione $x \cdot 2^x = 30$, poichè posto $x = 3$ resulta $3 \cdot 2^3 = 24$ con difetto 6, e posto $x = 4$ resulta $4 \cdot 2^4 = 64$ con eccesso 34, la regola di doppia falsa posizione darebbe $x = \frac{4 \times 6 + 3 \times 34}{6 + 34} = \frac{126}{40} = 3\frac{3}{20}$, per la prova del qual valore, o sia dell'equazione $\frac{63}{20} \cdot 2^{\frac{63}{20}} = 30$, vedesi, che, prescindendo dall'ajuto dei logaritmi, importerebbe la estrazione della radice 20^{ma} di 2 elevato alla potenza 63^{ma}; e la dottrina generale delle estrazioni delle radici era anch'essa sconosciuta ai tempi di Fra Luca. In realtà poi sciogliendo in logaritmi $\frac{63}{20} \cdot 2^{\frac{63}{20}}$ trovasi L. $\frac{63}{20} + \frac{63}{20}$ L. $2 = 0{,}4983105 + \frac{63 \times 0{,}3010300}{20} = 0{,}4983105 + 0{,}9482445 = 1{,}4465550 =$ L. $27{,}961$: cioè la prima applicazione della regola di doppia falsa posizione producendo soltanto 27,961 in vece di 30, porge un resultato più lontano dal vero, che la risoluzione di Fra Luca, nella quale proviene 28,8.

Avanti di chiudere questo capo non tralascierò di avvertire, che versando propriamente l'aritmetica su la quan-

36

tità discreta, e su la continua propriamente versando la geometría, e sol nella quantità continua potendo intendersi la quantità irrazionale; perciò non può dirsi aritmetico, anzi dèe riguardarsi qual aritmeticamente impossibile un problema, che non ammetta nè per numeri interi, nè per rotti scioglimento, e quantità irrazionale richiegga. Così dunque aritmeticamente impossibili dir si debbono i due problemi di Fra Luca, in questo, e nell'antecedente articolo esaminati. Aritmetico diverrà quello dell'articolo antecedente, se in vece di attribuire al giro del terrestre equatore le miglia 20400, che seguendo Alfargano gli assegna Fra Luca, si ponga convenirgli miglia 29412, come suppone Tartaglia nel II de' suoi problemi di algebra. In tale supposto va Tartaglia su le traccie di Fra Luca, ed intero ribattendone il cammino, giugne ad $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{-3}{4} + \sqrt{117648}\right)} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{-3}{4} + 343\right)} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1369}{4}} = -\frac{1}{2} + \frac{37}{2} = 18$. Si può di fatto ideare un miglio tanto dell'arabo minore, che la circonferenza dell'equatore terrestre, siccome di 20400 miglia arabe, così sia di 29412 delle nuove miglia ideate; ma in corrispondenza diventeran minori i diurni viaggi dei due mobili, facendo il primo in vece di 1, 2, 3, 4... miglia arabe, 1, 2, 3, 4... delle miglia ideate più corte, ed il secondo 1, 8, 27, 64... di queste in vece di 1, 8, 27, 64... delle arabe. Questo esempio dimostra come un problema da aritmeticamente impossibile passar possa col solo cangiamento nella misura, o nell'unità alla natura di aritmetico.

CAPO VIII.

Del Più, e del Meno. Delle regole per essi. Della difficoltà sul lor senso fra i termini apparentemente dissimili di una equazione. Del vero grado, della specie, dell'essenza, del significato dell'altezza di questi. Della quantità Negativa. Storicamente. Matematicamente. Metafisicamente.

§. I. Un altro progresso dell'analisi da Leonardo a Fra Luca si fu l'idea della quantità negativa. Siccome però questa idea fu tratta dall'operare sul Più, e sul Meno; così l'occasion colgo di espor qui tutt'insieme la storia, e dilucidar la teoria di questi analitici sussidj: il che mi porterà a mostrare più chiaramente, a suo luogo e tempo, l'origine della idea della quantità negativa; ed avanti mi aprirà il campo a discutere, come ad onta della dissimile natura, che affacciasi ne' termini di una equazione, sia vero il significato del Più, e del Meno, che ad essi frappongonsi, vera sia l'equazione: della qual difficoltà tirando non altronde che dall'intrinseco stesso di ogni equazione il generale scioglimento, mi lusingo di spargere su la cosa qualche nuovo lume agli analisti non discaro.

§. II. A nulla ommettere della storia riguardante il Più, ed il Meno, incominciar per me dèesi da ciò, che se ne trova nell'opera del greco Diofanto. Nella Definizion sua IX chiama egli υπαρξιν, *abbondanza*, ciò che noi diciam *Più*, e λειψιν, *difetto*, ciò che noi esprimiamo per *Meno*; e stabilisce queste due regole: 1.ª che difetto moltiplicato per difetto produce abbondanza: 2.ª che difetto per abbondanza moltiplicato produce difetto. A sentimento del greco scoliasta Planude approvato da Xilandro, Diofanto in dire *difetto* non considerò difetto da sè, in idea semplice, ma in complessa, rapportandolo a quantità per esso, e del valor di esso scemata, come ad esempio in 6 — 4, dove il 6 soffre il difetto — 4, o vien di 4 scemato. *Defectum* (son le prime parole dello scolio) *vocat Diophantus non simpliciter, et qui nullo alio exstante, deesse intelligatur, sed exstans aliquid, cui quippiam deesse intelligatur*. In questo stesso senso poco dopo nello scolio medesimo il difetto vien definito *negatio* (subtractio) *quantitatis*; e da Xilandro voltasi eziandío *absentia* siccome per lo contrario *praesentia* in luogo di abbondanza. Io però su l'opinione di Planude, e di Xilandro non ardirei tener per certo, che il sottile greco analista Diofanto levato non siasi a concepire in idea solitaria ed astratta il difetto, a formarsi la nozione della quantità negativa. Ciò, che con certezza si vuol piuttosto dedurre si è, che alzar non vi si seppero Planude, e Xilandro. E sebben paja, che la idea della quantità negativa all'intelletto lor si mostrasse, la cura però, che ebbero di tener lontana dall'adottarla la mente di chiunque, a cui leggendo la definizion di Diofanto, fosse per presentarsi, appalesa la ripugnanza, che ad essa sentivano nella mente loro. Quinci è, che nello scolio dimostransi bensì, ad illustrazion degli insegnamenti di Diofanto, le regole per la moltiplica del più e del meno, ma solamente rispetto allo stato complesso, e si aggiungono le regole della loro somma, e sottrazione, ma ommesso in questa il caso, che alla quantità negativa conduce. Importa cionulladimeno a pieno lume nella storia conoscere la dimostrazione ivi recata della regola, che meno moltiplicato per meno produce più. Il tenore in corto n'è questo. Supposte (*Fig.* 8.) le rette AB, $BC = 5$, e tolte da esse le parti AE, $FC = 2$, è evidente essere $(AB - AE) \times (BC - CF) = EB \times BF =$ quadrato EF, ed in numeri $(5 - 2) \times (5 - 2) = 3.3 = 9$. Altrettanto, nulla più nulla meno, dèe risultare moltiplicando termine a termine $AB - AE$ con $BC - FC$, e in numeri $5 - 2$ con $5 - 2$. Or $AB \times BC =$ quadrato BD, in numeri $5 \times 5 = 25$; $AB \times - FC = GF \times - FC =$ rettangolo $- GC$, in numeri $5 \times - 2 = - 10$; $- AE \times BC = - AE \times AD =$ rettangolo $- AH$, in numeri $- 2 \times 5 = - 10$: dunque si ha sino ad ora $BD - GC - AH$, e in numeri $25 - 10 - 10$. Ma osservisi, che il rettangoletto quadrato KD, che si toglie in $- AH$, si è già tolto in $- GC$: dunque invece di toglier AH si tolga la porzione di lui AK, con di più, in luogo di KD, un piccol quadrato ad esso uguale KL: così per effetto delle operazioni sin qui eseguite si verrà ad avere $BD - GC - AK - KL$, ed in numeri $25 - 10 - 6 - 4$. Non resta che l'operazione $- AE \times - FC = - GK \times - GD = - ML \times - MK$, e in numeri l'operazione $- 2 \times - 2$. Dovendosi pertanto ad ultimo resultato ottenere $BD - GC - AK = EF$, e in numeri $25 - 10 - 6 = 9$; perciò di necessità conviene, che $- AE \times - FC$, o sia $- ML \times - MK$ compensi $- KL$, così che nel totale $BD - GC - AK - KL +$ il prodotto $- ML \times - MK$, scancellandosi $- KL +$ il prodotto $- ML \times - MK$, non resti che $BD - GC - AK$: dunque $- ML \times - MK$ dèe produrre $+ KL$, poichè così, e non altrimenti, può distruggere $- KL$. E in numeri dèe essere $- 2 \times - 2 = 4$, di tal modo unicamente potendosi $25 - 10\,6 - 4 +$

il prodotto -2×-2 ridurre a $25 - 10 - 6$. Questa dimostrazione è nello spirito la stessa che quella adotta da Fra Luca, ed anche oggidì usata, dimostrando per quantità complesse; nè differisce fuorchè in contener un passo di più, qual è il sostituire in luogo del rettangolo AH il rettangolo AK con il rettangoletto KL preso nel rettangolo EF, rendendo questo scemo, a fine di metter più chiaro sott'occhio la necessità di restituirglielo. Vediamo anche brevemente come nello scolio si ragioni riguardo alla sottrazione. Significando per N indeterminatamente un numero: 10 è più grande di $10 - N$ del difetto stesso N. Se da $10 - N$ sottraggasi $10 - 2N$, quello trovasi di questo maggiore di un N, di quanto cioè il maggior dei difetti $2N$ supera il minore e semplice N. $10 + 3N$ eccede $10 - 6N$ di $9N$, cioè dell'abbondanza $3N$, e del difetto $6N$ tutt'insieme. Questi sono i soli casi di sottrazione ivi contemplati, ne' quali tutti il residuo è positivo. Quanto al numero N, comecchè leggasi *donatu rvero numerus quotquot voles unitatum*, non può dubitarsi, che la volontà s'intenda entro certi limiti ristretta, di modo che il difetto non sia che qualche cosa dell'altro numero, al quale rapportasi, onde di questo abbia luogo l'idea *exstans aliquid, cui quippiam deesse intelligatur*.

§ III. Frate Luca nel trattato 1.° della Distinzione VIII prende a spiegare l'origine, l'ufficio, la forza dei termini Più e Meno, e le regole dell'operare per essi. Egli è spezioso, e di singolar attenzione degno il vocabolo, onde esprime l'ufficio, per cui furono inventati. Dice l'origin loro essere stata la necessità di *asettar insieme quantità diverse di natura, e denominazione, come numeri, e quantità sorde, e come in algebra cose, e censi, e numeri, che a un corpo* *non si possono redurse, perchè altra è l'unità de la cosa, altra quella del censo, altra quella del cubo etc., perocchè cosa representa linea, censo superficie, e cubo corpo.* Giusta questo dire le prime idee affisse ai termini Più e Meno, lungi dall'essere quelle di vera addizione, e di vera sottrazione, non furon che quelle di semplici mezzi per formare un misto, disponendo in una serie quantità disgiunte per diversità di grado e di specie. E di fatto in un polinomio quale $10 + 3x - 12x^2 + 6x^3 \ldots$, degli odierni segni valendomi, sino a che i termini si concepiscano veramente dissimili, non si può certamente tra loro concepire una vera relazione di aggiunta, o detraimento, ma soltanto un collocamento successivo, ed ordinato rappresentante un successivo ordinato concetto della mente: concepir no non si può che il segno $+$ prefisso al termine $3x$, dinotando x linea, significhi addizione di tre volte tal linea al numero 10; e nulla meglio è concepibile, che il quadrato x^2 su di essa linea costrutto dodici volte preso si sottragga dall'aggregato del numero 10 e di tre volte la linea x; e similmente ripugna l'immaginare che al residuo $10 + 3x - 12x^2$, cioè di 10 numero e 3 linee, meno 12 superficie quadrate aggiungansi 6 cubi x^3; onde non potendo i segni $+$, $-$ indicar vera addizione di quantità a quantità e vera sottrazione, altro non rimane fuorchè facciano l'ufficio di assettar ordinatamente quantità di natura diversa, come l'intelletto gradatamente a sè le dipigne. Ma come con questo concetto di puro assettamento per i segni $+$, $-$, senza verità di addizione, e sottrazione accordare la verità di una equazione, qual per esempio $4x^2 + 3x = 7$? Come può egli farsi, che senza una vera somma qui di $4x^2$, e $3x$ da questi due termini ne resulti 7? Ecco come spiega Fra Luca la cosa. *Non si po congruamente dire 3 linee, e 4 superficie fanno 7, perchè questo tal congionto de 7 non si po unitamente per intelletto aprendere: se non divisivamente, perchè son cose varie, che non possono fare una unita denominazione, peroche mai si po dire, che sienno 7 superficie over 7 linee, ma bene un misto di linee, e superficie*. E similmente in generale nell'equazione $ax^2+6x=n$, alla mente di Fra Luca, se x sia linea, il numero n non è un aggregato di unità omogenee, ma un misto di unità eterogenee, altre lineari, altre superficiali, e tante della prima specie quante importa $6x$, tante della seconda quante ne importa ax^2. Nell'equazion proposta da Fra Luca $4x^2+3x=7$, posto $x=1$ si ha $4.1^2+3.1=7$, dunque concepiscasi il 7 diviso in 3 unità lineari, e 4 superficiali. Prendendo l'equazione $4x^2+2x=2$, fatto $x=\frac{1}{2}$, ne viene $4.\frac{1}{4}+2.\frac{1}{2}=2$: quattro volte $\frac{1}{4}$ dell'unità superficiale danno la stessa unità superficiale, e due volte $\frac{1}{2}$ dell'unità lineare danno l'unità stessa lineare; dunque concepiscasi il 2, che sta nel secondo membro dell'equazione, composto di due unità eterogenee, una lineare, superficiale l'altra. Ho aggiunto questo esempio, acciocchè si vegga come l'idea di Fra Luca si adatti anche al caso, in cui x sia frazione. Egli è però da riflettere, che la risoluzione dell'equazione $4x^2+2x=2$ da $x=\frac{-1}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{-1}{4}\pm\frac{3}{4}$, $=\frac{1}{2}$ preso il segno $+$, $=-1$ preso il segno $-$. Laonde essa equazione dèe verificarsi, non solo per $x=\frac{1}{2}$, ma parimenti per $x=-1$. Or sostituito nella medesima questo valor di x ne resulta $4-2=2$, equazione, della quale la verità è evidente, concependo il termine -2 simile al termine 4, e significata per $-$ una vera sottrazione. Ma come al contrario intender vera l'equazione, se nel 4 concepiscansi quattro unità superficiali, e nel 2, che lo segue col segno —, due unità lineari? Si trasporti il riflesso alla radice negativa dell'equazione stessa di Fra Luca, ed in genere alla negativa radice dell'equazione $a x^2 + b x = n$ si estenda. Il Pacioli non potè avvedersi di questo difetto della sua spiegazione, non conoscendo le radici negative delle equazioni, ma dovea accorgersi, che la medesima spiegazion sua applicar non si poteva tampoco alla radice positiva dell'equazione $a x^2 + b x + n$, nè similmente alle due positive, se reali, dell'equazione $a x + n = b x$. Esempj ne sieno $x^2 = 2x + 3$; $x^2 + 8 = 6x$. La prima ha per radice positiva $x = 3$, dalla quale sostituendo, proviene $9 = 6 + 3$. Or, se dicasi rappresentarsi per 6 sei unità lineari, esempigrazia sei piedi di lungo, per 9 nove piedi superficiali, o nove quadratelli di un piede ciascuno, chi, qualunque rappresentanza assegnisi a $+3$, potrà comprendere, che si avveri $9 = 6 + 3$? Si ragioni in simil maniera su la seconda equazione fornita delle due positive radici $x = 4$, $x = 2$, le quali porgono $16 + 8 = 24$; $4 + 8 = 12$, uguaglianze per niun verso intelligibili, se i numeri 16, e 4, che stanno nel primo membro con l'8, rappresentino piedi superficiali, e semplici piedi lineari i numeri 24, e 12, che rimangon soli nel secondo membro. Le verità al contrario di esse equazioni si rendono intuitive, se i termini si riguardino tutti come della stessa natura. Incontra la spiegazion di Fra Luca un'altra difficoltà, se la radice dell'equazione sia irrazionale, e ciò anche se sia positiva, anche in equazione di forma $a x^2 + b x = n$. Sia l'equazione $x^2 + 2x = 4$, la quale ha a sua positiva radice $x = -1 + \sqrt{5}$, onde esser debbe $(-1 + \sqrt{5})^2 + 2(-1 + \sqrt{5}) = 4$, ed effettuando il quadrato, $6-2\sqrt{5}-2+2\sqrt{5}=4$; ma $-2\sqrt{5}$, che si riferisce alla superficie quadrata $(-1+\sqrt{5})^2$, è superficie, la quale intender si dèe tolta dalla superficie 6; all'opposto $+2\sqrt{5}$ non significa che due volte la linea $\sqrt{5}$, la quale diminuir si dèe della linea 2: dunque sebbene abbiano $-2\sqrt{5}$, $+2\sqrt{5}$ segno contrario, non si possono scambievolmente distruggere per essere di dissimil natura, siccome per la medesima dissimiglianza non può il razionale termine -2 elidere un 2 nel razionale 6, e ridur questo a 4. Bisogna per conseguenza concepire irrazional superficie da razional superficie sottratta, e razional linea sottratta da linea irrazionale, e concepir poi, che i residui compongano insieme il numero 4. Qual cosa più impercettibile? Qual mostro in questo senso nell'equazione $6-2\sqrt{5}-2+2\sqrt{5}$? Invano pertanto si studiò la prima età dell'analisi in Italia di conciliare verità di equazione, e dissomiglianza di termini, ideando nel termine noto un misto implicito corrispondente al misto esplicito nei termini ignoti; e riconosciuti avrebbe i limiti di questa idea fabbricata su l'equazione $ax^2+bx=n$, e nell'ipotesi di x razionale, se la cura presa si fosse di estenderle alle altre forme di equazione, od all'ipotesi di x irrazionale. Egli è quindi giuoco forza, ad intendere generalmente vere le equazioni, intender della stessa altezza tutti i termini, concepir tra loro vera relazione, addizion vera, vera sottrazione. Come però questo, se i termini si danno a veder dissimili, diversi in grado, eterogenei?

§. IV. La verità da sè evidente, che aggiugner non si possano l'una all'altra, nè l'una dall'altra sottrarre, se non le quantità omogenee, fu detta *Legge degli omogenei*. Vieta ne fa maestro, non so qual, Adrasto, e di essa si occupa nel capo III della sua Isagoge su l'arte analitica, intitolato *De lege homogeneorum, et gradibus ac generibus magnitudinum comparatarum*. A norma di fatti della legge degli omogenei va egli ivi assegnando le grandezze, che paragonar si possono, ed insiem combinare a costituire le equazioni di diverso grado, di 2.°, di 3.°, di 4.°. Nell'equazione di 2.° grado non possono aver luogo che il quadrato della grandezza incognita, che egli segna *A*, il piano di una cognita con essa, ed un piano noto. Non altre grandezze entrar possono a comporre un'equazione di grado 3.° che il cubo dell'incognita *A*, il solido del quadrato di essa con una nota, il solido della medesima semplice con un piano noto, ed un noto solido. Nè altre a comporre un'equazione di 4.° grado che il quadrato-quadrato dell'incognita *A*, il cubo di essa in una nota, il quadrato della medesima in un piano noto, la stessa semplice in un solido noto, ed un piano-piano noto. Questi sono i precetti di Vieta, acciocchè sia salva la legge degli omogenei nell'equazione. Wallis dice, che egli fu, che al termine noto diede il nome di omogeneo di comparazione, e così lo chiama nel capo VII, dove definisce *magnitudo, certa cui comparantur reliquae, est homogeneum comparationis*. Ad intender appieno la ragion della quale definizione bisogna risovvenirsi, che Vieta raccoglie tutti i termini incogniti nel primo membro dell'equazione, e lascia solo il noto nel secondo. Giusta gli esposti precetti, e le esposte denominazioni presenta Vieta nei due libri *De recognitione aequationum* — *De emendatione aequationum* i termini delle letterali equazioni. Nel primo inoltre di questi libri, dove, a far riconoscere la costituzione delle equazioni, le risolve in problemi di continue proporzionali, apparisce come giusta tal origine aver debbano i termini omogenei; ma questa via è estrinseca, e non presenta la verità che in aspetto particolare: Vieta, che si appressò al conoscimento della composizione intima delle equazioni, ma non giunse ad un pieno lume di essa, non potea dimostrare per via generale, ed intrinseca la omogeneità di grado nei termini loro. Analisti posteriori hanno distinto le equazioni, nelle quali salva è la legge degli omogenei, e quelle, nelle quali essa manca, ed hanno studiato a dei ripari di tal mancanza. Uno de' proposti ripari è quello delle sostituzioni. Se esempigrazia l'equazione sia $ax + y^4 - by^2 = 0$, supponendosi $y^2 = z$, e sostituendo si ottiene $ax + z^2 - bz = 0$, equazione omogenea. Se offerta venga l'equazione $bx - a^3y + c^4y^2 = 0$, posto $y = \frac{1}{z}$, e fatta la sostituzione, proviene $bx - \frac{a^3}{z} + \frac{c^4}{z^2} = 0$, nella quale equazione essendo $\frac{a^3}{z}$, $\frac{c^4}{z^2}$ di due dimensioni, non altrimenti che bx, si ha la omogeneità desiderata. È evidente rimaner medesimi gli effetti se la variabile x cangisi in una costante, cioè se le equazioni si traducano da equazioni a due variabili ad equazioni di una sola variabile o incognita, dalla specie di indeterminate alla specie di determinate. Addomando io però: il porre $y^2 = z$, ovvero $y = \frac{1}{z}$, non è egli fabbricare delle equazioni eterogenee per rimediare alla eterogeneità di altre? Ma vi sono due artificj assai più pregiati siccome generali. Uno è rovescio dell'altro, consistendo l'uno in moltiplicare, l'altro in dividere i termini dell'equazione per le convenevoli potenze dell'unità, sicchè la somma delle dimensioni, che i termini già avevano, e delle dimensioni dell'unità, o la differenza, riesca in tutti i termini la stessa. Trattisi di render omogenei i termini dell'equazione $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + Q = 0$:

si faccia a chiarezza, e generalità maggiore $1 = m$; per il primo artificio si avrà $x^4 + A x^3 + B m x^2 + C m^2 x + Q m^3 = 0$, equazione omogenea, e per il secondo $\frac{x^4}{m^3} + \frac{Ax^3}{m^3} + \frac{Bx^2}{m^2} + \frac{Cx}{m} + Q = 0$, omogenea parimenti. È manifesto, che questa seconda equazione omogenea si può trarre dalla prima, dividendola per m^3, moltiplicator dell'ultimo termine $Q m^3$, ed è pur evidente, che l'effetto del primo artificio si è il recare tutti i termini dell'equazione al grado del più alto di essa, ed all'incontro l'effetto del secondo il deprimerli tutti al grado del più basso. I termini in questo innalzamento o abbassamento di grado non soffrono alcuna alterazione nella quantità, che è quella, cui l'equazione riguarda. Poichè un rettangolo per esempio di 6 piedi quadrati moltiplicato per 1 piede passa ad esser un solido di 6 piedi cubici, ritenendo nell'ordine di solidità la quantità numerica 6, che prima aveva nell'ordine di superficie; perchè prende rispetto ad un piede cubico quel rapporto, che aveva rispetto al 1 piede quadrato; e lo stesso rettangolo di 6 piedi quadrati diviso per 1 piede si riduce a linea di 6 piedi, prendendo rispetto al piede semplice lineare il rapporto, che aveva al piede superficiale quadrato; e non altrimenti il solido di 6 piedi diviso per 1 piede quadrato trasformasi in linea di 6 piedi, prendendo rispetto al piede lineare il rapporto che aveva rispetto al cubico; e generalmente una grandezza di grado qualunque moltiplicata, o divisa per qualsivoglia grado della grandezza semplice presa ad unità prende rispetto al nuovo grado, a cui per moltiplica sale, o per divisione scende, il rapporto, che aveva al grado primiero, e perciò conserva la stessa quantità numerica, per cui tal rapporto era espresso: attesochè l'unità a qualunque grado elevata non è più che unità in quel grado, e nel moltiplicar o dividere la grandezza data di grado qualunque non tocca il numero delle unità di questa, ma solo ciascuna unità, o il grado di ciascuna, aggiugnendovi, o dettraendone l'altezza sua. Essendo poi nella geometría libero il pigliar una retta qualunque, più e men lunga, ad unità, se non venga particolarmente nel problema determinata, quinci è, che ad abbracciar con universale estensione il caso di qualunque problema, l'unità si rappresenta indeterminatamente per la grandezza m. Tal è nel miglior suo lume l'odierna dottrina di quella che dicesi omogeneizzazione di una equazione.

Del resto io mi maraviglio, che dopo i progressi dell' analisi, penetrata già perspicuamente l'intrinseca composizione delle equazioni, avvertita non siasi una bella verità, che spontaneamente ne emana, e che io espongo nel seguente

Teorema I. Qualunque equazione $x^n + A x^{n-1} + B x^{n-2} + C x^{n-3} + D x^{n-4} \ldots\ldots + Q = 0$ è da sè, di natura sua, necessariamente omogenea nel grado di tutti i suoi termini.

Dimostrazione. Insegna la teoría delle equazioni, che una equazione qualunque di grado n ha un numero n di radici, e che il coefficiente A di x^{n-1} è la somma di esse con segno contrario, il coefficiente B di x^{n-2} è l'aggregato dei prodotti loro a due a due col proprio segno, il coefficiente C di x^{n-3} è l'aggregato delle stesse a tre a tre con contrario segno, il coefficiente D di x^{n-4} l'aggregato dei prodotti delle medesime a quattro a quattro, e così discorrendo il coefficiente in genere di x^{n-h} l'aggregato dei prodotti delle radici secondo tutte le combinazioni, prendendole a numero h, o con segno poi contrario, o proprio, giusta il luogo, o pari, o dispari di x^{n-h} nell'equazione, ed in fine con simil condizione, della quale però qui non cale, l'ultimo termine Q, che si può considerare come il coefficiente di $x^{n-h} = x^{o} = 1$, è il prodotto di tutte le radici insieme. Dunque il coefficiente A di x^{n-1} è di 1.° grado, il coefficiente B di x^{n-2} è di grado 2.°, il coefficiente C di x^{n-3} è di grado 3.°, e generalmente il coefficiente di x^{n-h} è di grado h^{mo}; così che il grado del coefficiente compensa sempre il grado tolto ad x^{n}, sinchè finalmente l'ultimo termine, coefficiente di x^{n-n}, ossia di x^{o}, sale al grado n, e si uguaglia al grado di x nel primo termine, ove reciprocamente il grado del coefficiente si può considerar o, essendo esso coefficiente 1, che equivale a qualunque quantità, per grande che sappiasi immaginare, S elevata al grado o. In tutti pertanto i termini la somma del grado di x, e del grado del coefficiente riesce la stessa, cioè n; laonde tutti essi termini sono di grado fra loro omogenei, e resta dimostrato, che qualunque equazione da sè, di sua natura, per ragione intrinseca di sua composizione è necessariamente nell'altezza de' suoi termini tutti omogenea.

Non vi può esser dunque problema, il quale dia una equazione di termini realmente in grado eterogenei; e se talvolta da un problema esca equazione mancante nel grado de' suoi termini di omogeneità, la mancanza non può essere che apparente. A dare un'idea generale del come nascer possa questa apparente mancanza, sieno $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \delta$, $x = \gamma$, $x = \varepsilon$ .... le radici di una equazione di grado n, e sia $\alpha + \beta + \delta + \gamma + \varepsilon + \ldots = a$, e facciasi poi la somma dei rettangoli $\alpha\beta + \alpha\delta + \alpha\gamma + \alpha\varepsilon + \ldots + \beta\delta + \ldots =$ ad un rettangolo bc, la somma dei solidi $\alpha\beta\delta + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\varepsilon \ldots + \beta\delta\gamma + \ldots =$ ad un solido

def, la somma dei prodotti a quattro à quattro $\alpha\beta\delta\gamma +$ $\alpha\beta\delta\varepsilon + \ldots + \alpha\beta\gamma\varepsilon + \ldots =$ ad un prodotto di quattro quantità $ghik$, e così via via: l'equazione avrà la forma $x^n - a x^{n-1} + bc x^{n-2} - def x^{n-3} + ghik x^{n-4} \ldots \mp \alpha \times \beta \times \delta \times \gamma \times \varepsilon \ldots = 0$, nella quale ogni termine è manifestamente del grado n. Ma nel coefficiente ad esempio $ghik$ del termine quinto suppongasi $g = 1$, il coefficiente ridurrassi ad hik, ed il termine diverrà all'occhio di grado $n - 1$; se prendasi anche $h = 1$, ridotto il coefficiente ad ik, il termine apparirà di grado $n - 2$; e pigliato eziandío $i = 1$, e con ciò ridotto il coefficiente a k, il termine non si mostrerà che di grado $n - 3$. In tutte però queste ipotesi non tralascierà egli di essere in fondo, ed in intrinseca realità di grado n; solamente questo grado non sarà cospicuo, ma in parte latente, e l'intelletto per concepirlo dovrà sottintender 1, o 1^2, o 1^3. Dicasi similmente di ogni altro termine dell'equazione. Se ponganst b, d, e, g, h, i, e tutte successivamente le quantità, delle quali composti sono i coefficienti, eccetto una per ciascheduno, uguali ad 1, e di più suppongasi l'ultimo termine $\alpha \times \beta \times \delta \times \gamma \times \varepsilon \ldots = q \times 1^{n-1}$, ne verrà l'equazione

$$x^n - a x^{n-1} + c x^{n-2} - f x^{n-3} + k x^{n-4} \ldots \mp q = 0$$

i termini della quale dopo il secondo sembreranno andar gradatamente discendendo di grado, quantunque in realità tutti della medesima altezza n. E sarebbe questa l'equazione del problema, in cui si proponesse di assegnare numero n di quantità α, β, δ, γ, $\varepsilon \ldots$ la somma delle quali fosse $= a$, l'aggregato dei rettangoli loro prese a due a due $=$ al rettangolo dell'unità in una data grandezza c, l'aggregato dei solidi da esse formati prendendole a tre a tre $=$ al solido del quadrato 1^2 in altra data grandezza f ec., e finalmente il prodotto di tutte $n =$ al prodotto di 1^{n-1} nella data grandezza q. E facendo eziandío a, c, f, k..... $q = 1$ l'equazione prenderebbe l'aspetto

$$x^n - x^{n-1} + x^{n-2} - x^{n-3} + x^{n-4} \ldots\ldots \mp 1 = 0$$

mostrando dal secondo termine di scendere ordinatamente, e continuamente di grado; e sarebbe l'equazione del problema di cercar un numero n di quantità α, β, δ, γ, ϵ.... la cui somma $= 1$, l'aggregato dei rettangoli $= 1^2$, l'aggregato dei solidi $= 1^3$..... il prodotto di tutte $n = 1^n$.

Tutta dunque la differenza possibile tra le equazioni non è già l'esser le une giusta la legge degli omogenei nei gradi dei loro termini composte, le altre no; ma sì l'esser nelle une la omogeneità esplicita, nelle altre implicita. E quella che dicesi omogeneizzazione, a intender giusto, e a fondo, non è che una eduzione ed espressione della omogeneità latente ed implicita. E poichè un problema, che offra equazione apparentemente nell'altezza de' termini eterogenea, suppone una grandezza nota e determinata scelta ad unità, e rappresentata per 1; quinci l'immediato modo, ed al supposto del problema congruente, di dichiarare la implicita omogeneità dei termini, sarà quello di esprimere ne' coefficienti gli impliciti fattori 1, 1^2, 1^3, 1^4..... Se si raffiguri per la specie m la grandezza nel problema stabilita ad unità, potrassi in vece di 1, 1^2, 1^3, 1^4..... adoperare le potenze m, m^2, m^3, m^4..... a fine di render l'omogeneità più cospicua. Ma se si passi ad intendere sotto la specie m una grandezza indeterminata da prendersi ad arbitrio per unità, sarà questo un trasferire il problema da unità determinata ad unità indeterminata, un liberarlo da supposto particolare, un estenderne la contemplazione: le grandezze tutte componenti i coefficienti ricevendo in luogo di una determinata misura una misura indeterminata, e conservando a questa il rapporto, che a quella avevano per condizion del problema, diverranno assolutamente indeterminate, sebben non rispettivamente. Non tornerà opera perduta l'aver rettificate, o dilucidate su questi punti le idee.

Ciò, che delle equazioni ad una sola incognita si è per me dimostrato, si trasporta alle equazioni indeterminate, o sia a due incognite o variabili; per lo che soggiungo:

Teorema II. Ogni equazione indeterminata a due incognite o variabili x, y è da sè, e naturalmente nel grado dei suoi termini omogenea.

Dimostrazione. Sia primieramente l'equazione $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots\ldots + Q = y$, che spetta geometricamente una curva di genere parabolico. Fatto $y = 0$, si ha l'equazione considerata nel Teorema I, e dimostrata di natura sua necessariamente nel grado di tutti i termini omogenea. Invece di far $y = 0$, attribuendogli un valor qualunque R, ne verrà di conseguenza il dover cangiare il valor di x, ma il primo membro dell'equazione rimarrà nel grado di tutti i suoi termini omogeneo, come prima; e trasferendo in esso primo membro il valor R dato ad y, si avrà l'equazione $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots + Q - R = 0$, nella quale per il medesimo Teorema I il termine $Q - R$ dèe esser dello stesso grado n che tutti gli altri, e lo è di fatto Q; dunque esser lo debbe altresì R. E ciò dovendo valere per qualunque più semplice valor che piaccia intender sotto la specie R, anche 1, bisognerà concepir R, e conseguentemente y moltiplicato per l'implicito coefficiente 1^{n-1}, e perciò l'assunta equazione intrinsecamente omogenea, sebbene non tale all'aspetto. Procediamo alla considerazione, e dimostrazion generale. Comunque l'equazione indeterminata sia composta delle due incognite o variabili x, y, assegnato a piacere un valore all'una, o all'altra di esse, l'equazione cade sotto il Teorema I, e si prova intrinsecamente omogenea; dunque non dipendendo dal valor determinato nè dell'una, nè dell'altra l'omogeneità, essa è indeterminatamente, universalmente, per la general natura di equazione omogenea. Se apparisca eterogenea, l'apparenza abbiasi per falsa, e svanirà tirate in luce le occulte potenze dell'unità. Così l'equazione $x^5 + y x^3 + a x^2 + y^2 + q = o$ prenderà manifesta omogeneità nella espressione $x^5 + 1 . y x^3 + 1^2 . a x^2 + 1^3 . y^2 + q . 1^4 = o$. E qui si rifletta che, determinato ad arbitrio y, si avrà un'equazione determinata in x di grado 5.°, del qual grado saranno tutti i termini. Che se all'incontro si ponga determinato a piacere x, ne verrà l'equazione determinata in y, $1^3 y^2 + 1 . x^3 y + 1^2 . a x^2 + x^5 + q . 1^4 = o$, e dividendo per 1^3, $y^2 + \frac{x^3}{1^2} y + \frac{ax^2}{1} + \frac{x^5}{1^3} + q . 1 = o$, equazione di 2.° grado, e nella quale tutti i termini sono di 2.° grado, come nella prima tutti erano di 5.°: l'una cosa, lungi dall'esser con l'altra incoerente, segue dall'altra. Ci si mostra ad un tempo in ciò il caso naturale della omogeneizzazione per divisione, e moltiplica insieme; e sarebbe stata per division semplicemente, se nel luogo della grandezza lineare q si fosse in ultimo termine assunto il rettangolo pq. Vedesi pertanto non essere la omogeneizzazione per divisione, che il passaggio in tutti i termini di una equazione indotto dalla omogeneità in un grado dato alla omogeneità in un grado più basso, e perciò meglio direbbesi abbassamento di omogeneità, come la omogeneizzazione per moltiplica eduzione, dichiarazione di omogeneità.

La natura di una equazione non acconsente, che i termini suoi sieno intrinsecamente eterogenei per diversità di grado, ma acconsente bene, e il più delle volte avviene, che sieno eterogenei per diversità di specie. Denomino *diversità di specie* la diversità tra le quantità razionali, e le irrazionali. In ogni equazione l'ultimo termine è razionale; ma se x sia irrazionale, gli altri termini, che lo comprendono, saranno, o per intero, o in parte, irrazionali, e così l'equazione sarà composta di due specie di quantità, e sarà nella specie de' termini eterogenea. Nell'equazione generale di secondo grado $x^2 + ax + b = 0$, essendo universalmente $x = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4b)}$, se $a^2 - 4b$ non sia un quadrato, e per conseguenza sia x irrazionale, si avrà sostituendo

$$\left(-\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4b)}\right)^2 + a\sqrt{\left(-\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4b)}\right)} + b = 0$$

dove il primo, ed il secondo termine sono ambidue misti, cioè in parte razionali, e in parte irrazionali. Ma nella equazione di terzo grado $x^3 - px - q = 0$, sostituendo il general valore di $x = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$, e supponendo le due parti di questo valore irrazionali, il secondo termine px sarà interamente irrazionale, il primo x^3 parte irrazionale, parte razionale, poichè diverrà $+q + p\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}\right)$. È evidente, che a verificarsi l'equazione, ciascuna delle due specie deve distruggersi da sè, l'aggregato dei termini irrazionali, e delle parti irrazionali de' termini misti da sè, e da sè l'aggregato delle parti razionali di essi termini misti, e dell'ultimo termine razionale. La natural necessaria omogeneità di grado in ogni equazione nel Teorema I dimostrata reca il vantaggio d'illuminare la mente a comprendere con piena chiarezza come possano fra loro elidersi le quantità irrazionali di diversi termini, siccome le razionali tra loro: poichè essendo del medesimo grado, qual maraviglia che si abbattano, si distruggano, se tanto vagliano in quantità le negative che le positive? Subito che nell'equazione di secondo grado, del pari che la porzione irrazionale $\mp a . \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - 4b)}$ del 1.° termine, eziandío la porzione irrazionale $\pm a . \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - 4b)}$ del 2.° significhi superficie, non giusta il concetto di Fra Luca un numero di volte a la linea irrazionale $\pm \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - 4b)}$, la distruzione delle porzioni irrazionali, siccome pure delle quantità razionali $\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} (a^2 - 4b) - \frac{1}{2} a^2 + b$, fra loro è coidente. Il simil è delle irrazionali, e razionali grandezze dell'equazione di terzo grado. Qui però si affacciano alcune difficoltà: nella formola generale del valore di x si ha sotto il segno radicale di secondo grado la sottrazione $\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3$, cioè di un solido $\frac{1}{27} p^3$ da un quadrato $\frac{1}{4} q^2$ contro la legge degli omogenei. Le parti di x^3 risultano, l'una, la razionale cioè, sotto aspetto di semplice linea, l'altra, cioè la irrazionale, sotto l'aspetto di superficie. Queste difficoltà si dileguano alla presenza del teorema della naturale intrinseca omogeneità di grado nei termini di ogni equazione per ragion della composizione di essa. Presente questo teorema è manifesto, che nell'equazione $x^3 - px - q = 0$, p o deve riguardarsi come una grandezza di secondo grado, una superficie, o deve sottintendersi moltiplicato per 1 e q, o dèe considerarsi come una grandezza di terzo grado, un solido, o sottintender si dèe moltiplicato per 1^2. Nel primo caso $\frac{1}{4}q^2$ sarà da sè di sesto grado, e così pure $\frac{1}{27}p^3$, onde la sottrazione $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$ sarà conforme alla legge degli omogenei; $\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}$ significherà una grandezza di terzo grado, e parimenti la somma od il residuo $\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}$, e per conseguenza le radici cubiche loro saranno grandezze di grado 1.°; la moltiplica di esse con p grandezza di 2.° grado darà solido, e perciò tal sarà l'intero secondo termine dell'equazione, tal la parte irrazionale del primo, cioè del cubo x^3, e per la contrarietà de' segni si elideranno, come non meno la parte razionale $+q$ di esso cubo x^3, e l'ultimo termine $-q$, grandezze da sè di 3.° grado, uguali e contrarie. Nel secondo caso dispiegando la implicita omogeneità di grado ne' termini, l'equazione sarà $x^3 - 1 \cdot p\,x - 1^2 \cdot q = 0$;

$$x = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\,1^4 \cdot q^2 - \frac{1}{27}\,1^3 \cdot p^3\right)}}\right) + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\,1^2 \cdot q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\,1^4 \cdot q^2 - \frac{1}{17}\,1^3 \cdot p^3\right)}\right)},$$

e sostituendo

$$+1^2 \cdot q + 1 \cdot p\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\,1^2 \cdot q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\,1^4 \cdot q^2 - \frac{1}{27}\,1^3 \cdot p^3\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\,1^2 \cdot q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\,1^4 \cdot q^2 - \frac{1}{27}\,1^3 \cdot p^3\right)}\right)}\right)$$

$$-1 \cdot p\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\,1^2 \cdot q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\,1^4 \cdot q^2 - \frac{1}{27}\,1^3 \cdot p^3\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\,1^2 \cdot q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\,1^4 \cdot q^2 - \frac{1}{27}\,1^3 \cdot p^3\right)}\right)}\right) - 1^2 q = 0.$$

Ecco, presa l'opportunità, trasferita dai termini dell'equazione ai termini della formola della radice la considerazione, e dimostrata anche nei termini di questa universalmente, o esplicita, o implicita, l'omogeneità di grado; è facile applicare, retrocedendo, i riflessi alla formola della radice dell'equazione di secondo grado, e progredendo alle formole delle radici delle equazioni di più alto grado, che l'analisi sa sciogliere.

Ammettono le equazioni ne' termini loro anche *eterogeneità di essere*, intendendo per tale diversità quella tra le quantità reali, e le quantità immaginarie. Ciò avviene, essendo sempre l'ultimo termine reale, ogni qual volta abbia x un valor immaginario. Così se nell'equazion di secondo grado sia $a^2 < 4b$, il valor di x sarà immaginario, e sostituito nell'equazione, il primo ed il secondo termine di questa saranno ambidue misti di reale, ed immaginario. Può aver in una equazione luogo, in qualche senso, tale eterogeneità, eziandio senza che il valor di x sia immaginario, purchè espresso sia per formola a parte a parte immaginaria, sebbene in complesso reale. Tanto accade nella formola di x per l'equazione di terzo grado $x^3 - px - q = 0$, qualora $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$: ciascuna parte della formola separatamente è immaginaria, il complesso loro è reale, il valor di x reale. Sostituita la formola nell'equazione, il secondo termine $-px$ sarà composto di due parti immaginarie, considerato però nell'intero sarà reale; ed il primo termine x^3 consterà di una parte reale e di due parti immaginarie, la somma però delle quali sarà reale. La naturale intrinseca omogeneità di grado ne' termini di qualunque equazione rende facile a intendere come possano tra loro abbattersi, ed annientarsi le quantità immaginarie de' diversi termini, qualora sieno in grandezza uguali, e di contrario segno.

Dimostrata la naturale intrinseca omogeneità di grado nei termini di una equazione qualunque, si estende in una equazione al grado terzo superiore ai termini tutti quella difficoltà, che su i termini espressamente alti oltre il terzo grado si ristrignea. In una equazione ad esempio di quarto grado, che è la più semplice delle superiori al terzo, e la cui forma generale si è $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, per il Teorema I ogni termine è, se non esplicitamente, implicitamente di quarto grado. Or se l'equazione a geometría riferiscasi, se x e le grandezze note sien linee, che cosa significa questo quarto grado del primo termine x^4, e di tutti gli altri omogenei termini? Che vuolsi in genere di estension concepire oltre il solido? Si presentò la difficoltà dell'estensione di più che tre dimensioni agli antichi Geometri nell'ampliare il problema abbozzato da Euclide, e da Apollonio svolto, di trovare un punto, o a meglio dire il luogo de' punti, tali ciascuno, che conducendo a tre o quattro rette date di posizione tre o quattro rette, ciascuna a ciascuna, sotto dati angoli, il rettangolo di due delle condotte rette fosse in data ragione al quadrato della terza nel primo caso, od al rettangolo delle altre due nel secondo. L'ampliamento prossimo del problema egli è a cinque o sei rette date di posizione, cercando il luogo de' punti, ciascuno tale, che conducendo ad esse rette sotto angoli dati altrettante rette, il solido di tre di queste sia al solido del quadrato di una delle due rimanenti nell'altra, o di ambedue in una retta data di grandezza nel primo caso, od al solido delle altre tre nel caso secondo in ragion data. Volendo ampliar il problema a sette, od otto rette di posizione date, bisognerebbe per similitudine di condizione poter concepire una estensione, che fosse prodotto di quattro rette, ed in genere ampliar volendolo a rette $2n - 1$, od n date di posizione, sarebbe mestieri, continuando in simile condizione, potersi formare idea di una estensione di numero n dimensioni. Ecco l'inciampo, che si attraversò agli antichi geometri nel concepimento stesso, e nella enunciazione del problema. *Quod si ad plures quam sex datas rectas rectae in datis angulis duci debeant, non adhuc habent dicere data sit proportio cujuspiam contenti quatuor lineis ad id quod reliquis continetur. Quoniam non est aliquid contentum pluribus quam tribus dimensionibus*. Così, al tradur di Commandino, Pappo nei preliminari del libro VII parlando dei conici di Apollonio. A schivare l'inciampo stima Pappo medesimo esser mestieri ricorrere alla composizione delle ragioni, ed anzi, che per estensione prodotta, doversi concepire ed enunciare per ragione composta, cominciando a farlo nei gradi stessi più bassi del problema. Quinci la ragion data, che sia $a:b$, del prodotto pq di due delle quattro rette da condursi al prodotto ux delle altre due, doversi considerare come una ragion composta delle due semplici $p:u$, $q:x$; similmente la ragion data, la qual sia $f:g$, del prodotto pqr di tre delle sei rette da condursi al prodotto uxy delle altre tre, doversi considerare come una ragione composta delle tre semplici $p:u$, $q:x$, $r:y$; nè altrimenti la ragion data ed espressa per $h:i$ del prodotto $pqrs$ di quattro delle otto rette da condursi al prodotto $uxyz$ delle altre quattro, doversi considerare come una ragion composta delle quattro semplici $p:u$, $q:x$, $r:y$, $s:z$. Questo concetto non incontra ostacolo o limite, ed ha progresso libero all'infinito. Io non so perchè Montucla [1] abbia scritto *Pappus récourt aux raisons composées; ce qui est prolixe et embrouillé*. Il dire stesso di Pappo non è certamente nè prolisso, nè imbroglia-

(1) Parte IV, lib. II, art. IV.

to. *Licebit autem*, così egli giusta il voltar di Commandino, *per conjunctus proportiones haec et dicere et demonstrare universe in dictis proportionibus, atque his in hunc modum. Si ab aliquo puncto ad positione datus rectas lineas ducantur rectae lineae in datis angulis, et data sit proportio conjuncta ex ea, quam habet una ductarum ad unam, et altera ad alteram, et alia ad aliam, et reliqua ad datam lineam, si sint septem; si vero octo, et reliqua ad reliquam, punctum continget* (per ductas rectas) *positione datas lineas. Et similiter quotcunque sint impares vel pares multitudine.....* Il francese Storico delle matematiche dà al suo Descartes la gloria di avere sciolta la difficoltà, che tenne agitati gli antichi ed i moderni su le potenze superiori al cubo, insegnando non doversi esse riguardare che come rette, se la geometría spettino, di posto oltre il quarto in una continua progressione geometrica principiante dall'unità o dalla retta x a tale presa nella quistione; ed i prodotti similmente di più che tre rette diverse non significar, che altre rette determinate per una serie di molte proporzioni discrete principiate dall'unità. Chi è che non veda l'affinità del concetto del Descartes con quello di Pappo? Io esaminerò, se, o in qual estensione tale concetto sia applicabile ai termini delle equazioni al terzo grado superiori, nella indagine metafisica generale, a cui mi accingo, sul significato, su l'effetto dell'altezza delle equazioni, e dei termini loro. Seguo la eletta scorta della composizione delle equazioni medesime, essendochè dalla natura, e forma intrinseca delle cose unicamente si può trarre la giusta nozione di tutto ciò, che loro appartiene.

Poste $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\delta$, $x=\gamma$..... le radici dell' equazione $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}.....+Q=0$, è comun dottrina esser questa il prodotto delle equazioni semplici $x-\alpha=o$, $x-\beta=o$, $x-\delta=o$, $x-\gamma=o\ldots$ Qui però è mestieri osservare, che moltiplicando sarebbe impossibile, che ne risultasse x^n, $x^{n-1}\ldots$ se s'intendesse, che tutte le equazioni si verificassero ad un tempo, o sia che x ad un tempo stesso rappresentasse le diverse quantità α, β, δ, $\gamma\ldots$ La cosa va concepita così; cioè, che ogni equazion semplice possa verificarsi in tempo diverso, e che nell'atto che una di esse, ad esempio la prima $x-\alpha=o$, si verifica rappresentando x la quantità α, le altre in luogo dell'essere di equazioni ricevan l'essere di mere quantità complesse, rappresentando in tutte x la quantità α, e convertendosi conseguentemente in $\alpha-\beta$, $\alpha-\delta$, $\alpha-\gamma\ldots$ Lasciandovi però la lettera x, si avrà per l'istante, in cui si concepisce $x-\alpha=o$, il prodotto

$$(x-\alpha=o)(x-\beta)(x-\delta)(x-\gamma)\ldots=x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}\ldots+Q=o$$

e basta il fattore $x-\alpha=o$ a render esso prodotto effettivamente uguale a zero. Di simil guisa concependo successivamente $x-\beta=o$, $x-\delta=o$, $x-\gamma=o$, si avranno i prodotti

$$(x-\alpha)(x-\beta=o)(x-\delta)(x-\gamma)\ldots=x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}\ldots+Q=o$$
$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta=o)(x-\gamma)\ldots=x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}\ldots+Q=o$$
$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)(x-\gamma=o)\ldots=x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}\ldots+Q=o$$

. . . .

E perchè tutti questi prodotti, sebben diversi ne' termini secondo il diverso valor di x, o secondo il diverso fattore $=o$, sono però simili, conservano lo stesso coefficiente, lo stesso grado, e per l'uso del medesimo simbolo x a rappresentar i diversi valori, che li rendono uguali a zero, si mostrano in tutto e per tutto sotto la stessa forma; quinci è, che si può in uno concentrare la rappresentazione di tutti. Ed ecco il vero concetto di una qualunque algebraica equazione.

Definizione. Una equazione algebraica qualunque $x^n + A x^{n-1} + B x^{n-2} + C x^{n-3} + D x^{n-4} \ldots + Q = 0$ è una forma, nella quale concentrasi la rappresentazione di numero n equazioni particolari di grado n, e i termini tutti della quale, tranne l'ultimo costante, hanno una moltiplice virtù rappresentativa di numero n quantità, ciascheduna di grado n. Così esempigrazia nell'equazione cubica $x^3 + A x^2 + B x + Q = 0$ si concentra la rappresentazione delle tre

$$\alpha^3 + A\alpha^2 + B\alpha + Q = 0;\quad \beta^3 + A\beta^2 + B\beta + Q = 0;\quad \delta^3 + A\delta^2 + B\delta + Q = 0$$

Il termine x^3 rappresenta i tre cubi α, β, δ; il termine $A x^2$ i tre solidi $A\alpha$, $A\beta$, $A\delta$; il termine $B x$ i tre solidi $B\alpha$, $B\beta$, $B\delta$.

Rettificato nella disgiunta, non simultanea, verità delle equazioni semplici il concetto della moltiplica loro, a comporre la equazione di alto grado n, ed illustrato nella moltiplice rappresentativa virtù di questa, e de' termini suoi il concetto del tutto e delle parti, procedo a distinguere le due sole specie di moltiplica, che intender si possono, e sono la moltiplica aritmetica, e la moltiplica geometrica. È la moltiplica aritmetica il prendere una quantità di specie qualunque, anche linea, superficie, solido, un certo numero di volte. Consiste la moltiplica geometrica in immaginare che una retta sia lungo altra retta condotta a formar superficie, ed una superficie sia per l'altezza di una terza retta condotta a generar solido. Si usa anche il titolo di moltiplica algebraica; ma in realtà quella, che così appellasi, non è che una indicazione di moltiplica; per esempio $a b$ non è che l'indicazione della moltiplica delle quantità rappresentate per a, b. E perchè può ugualmente indicare una moltiplica aritmetica, ed una moltiplica geometrica, perciò è una indicazione di duplice virtù. Tale indicazione riceve la sua determinazione, e consumazione, allorchè giusta la natura del problema, o ai simboli indeterminati a, b si sostituiscono numeri, e se ne effettua la moltiplica, o si delinea il rettangolo formato dalle due rette a, b. La quistione pertanto sul significato, e l'effetto del grado n nei termini dell'equazione $x^n + A x^{n-1} + B x^{n-2} + C x^{n-3} \ldots + Q = 0$, si riduce a cercare in qual senso debbansi prendere, se di moltipliche aritmetiche, o di geometriche. Per abbracciar la materia in tutta la sua estensione distinguerò tre casi:

Caso I. Allorchè l'equazione $x^n + A x^{n-1} + B x^{n-2} + C x^{n-3} \ldots + Q = 0$ appartiene a problema aritmetico, spettante cioè quantità discreta, ed x in conseguenza è numero. In tal caso ciascun termine dell'equazione rappresenta una moltiplica aritmetica di ordine n, e l'effetto di ciascheduna non è che la generazione di un numero di unità simili a quelle che rappresenta x, la qual generazione essendo di ordine n, per tal riguardo anch'esso il numero generato potrà dirsi di ordine n. Ad esempio sia $x = 2$, cioè rappresenti due unità, la potenza x^2 non vuol dir altro che le stesse due unità prese due volte, onde evidentemente ne provengono 4 unità della natura stessa stessissima che le due, poichè il prenderle due volte, lungi dal poter importare alteramento di esse, inchiude la condizione di replicarle nella natura loro. Similmente x^3 altro non significa che le 4 unità replicate; per lo che di necessità resultano 8 unità della natura delle 4, e delle due fondamentali: e così indefinitamente proseguendo a discorrere è manifesto, che una potenza di qualunque grado x^n altro non è che un numero, di ordine n in generazione, di unità della natura delle rappresentate per x. I coefficienti A, B, C..., numerici in problema aritmetico, vorran dire prendere le rispettive potenze, che accompagnano, x^{n-1}, x^{n-2},.... tante volte, quante essi contano unità, onde i numeri prodotti saran numeri di unità della natura delle unità x. D'altro canto per il Teorema I il coefficiente di x^{n-h} è di grado h; dunque sarà numero di ordine h in generazione, e così ogni termine dell'equazione sarà un numero di ordine n in generazione, ma di unità della stessa natura di quelle di x. Ma di qual natura saran elleno le unità di x? Se il problema sia intorno ai numeri astratti, le unità di x saranno coidentemente astratte, e per conseguenza tutti i termini dell'equazione saranno numeri astratti e di generazione di ordine n. Sembrerebbe, che similmente, se il problema spetti quantità discreta, determinata, e fisica, persone, monete, merci ec., le unità di x dovrebbero essere unità concrete, fisiche, secondo l'oggetto del problema, e conseguentemente tutti i termini dell'equazione altrettanti numeri di esse unità. A ben però considerare si fa incontro un riflesso. Suppongasi esempigrazia, che il problema riguardi persone, come se si cercasse il numero de' lavoratori ad una fabbrica in un dato tempo necessarj, significhi pertanto x in particolare idea numero di persone, cioè sia ogni unità di x una persona, le unità pure di x^2 saranno persone; ma egli sarebbe ridicolo concepir persone moltiplicate per persone, nè si può concepir altrimenti prodotto il numero persone x^2, che concependo il numero persone x preso numero di volte x; il che è moltiplicare il numero persone x per il numero astratto x, essendo in universale astratto di essenza il numero, per cui l'intelletto intende quante volte un dato numero debbe esser preso, ed al quale il nome si dà di moltiplicatore. Per altra parte l'assegnare ad x due rappresentanze diverse, una particolare e fisica come a moltiplicato, l'altra astratta e intellettuale come a moltiplicatore, e tirarne x^2, non altrimenti che se si fosse affisso ad x un concetto solo, non è ella cosa in buona metafisica incoerente? A schivar dunque tale incongruenza uopo è, non potendosi non prendere astratto x in quanto moltiplicatore, prenderlo anche tale in quanto moltiplicato, non considerare cioè nel cercato numero x di persone che il valor numerico, prescindendo dalla particolar concretta relazione a persone, o ad altro fisico soggetto dell'aritmetico problema. Quinci si raccolgono tre conseguenze:

1.ª Ogni problema aritmetico trattato per algebra è necessariamente astratto; e se proposto sia con riguardo concretto, cioè relativamente a quantità discreta fisica, particolare, sollevato viene al numero astratto: ciò che crea il vantaggio di applicarne il resultato, siccome alla cosa nella proposta contemplata, così a qualunque altra.

2.ª Ciascun termine dell'equazione di un problema aritmetico è un numero di unità astratte di ordine n in generazione.

3.ª Una equazione di problema aritmetico, la quale sia di grado n, è una rappresentazione virtualmente moltiplice di numero n complessi realmente, o intellettualmente diversi, tutti $=0$, ciascuno di numero $n+1$ numeri di unità astratte, e di ordine n in generazione: intellettualmente diversi non realmente dico i complessi, che provengono dalle radici uguali di una equazione, cioè dai valori uguali di x. Sebbene uguali, pure giusta il numero loro innalzan l'equazione, e l'intelletto ha ragion di distinguerli.

Caso II. Si riferisca l'equazione a problema geometrico, e denoti x una retta cercata; ma l'equazione non superi il terzo grado: così essendo, i termini dell'equazione possono essere prodotti di geometriche moltipliche, e significare nell' equazione di secondo grado $x^2 + Ax + Q = 0$ superficie, nell'equazione di terzo grado $x^3 + Ax^2 + Bx + Q = 0$ solidi. Si può di fatto espressamente addomandare un quadrato x^2, a cui aggiunto, o sottratto il rettangolo ax, la somma, o differenza sia uguale al rettangolo bc, cioè $x^2 \pm ax - bc = 0$; e parimenti cercar si può un cubo x^3, al quale aggiunta, o sottratta la somma, o differenza de' solidi $ax^2 \pm bcx$ ne resulti il solido def, o ne provenga l'equazione $x^3 \pm (ax^2 \pm bcx) - def = 0$. In simili problemi l'omogeneità di grado ne' termini sarà compresa nella enunciazione delle condizioni del problema; poichè folle sarebbe chi esempigrazia chiedesse un cubo x^3, a cui aggiugnendo tre volte la superficie quadrata x^2, e detraendo sei volte la retta x resultasse il solido def.

Caso III. Il caso difficile si è quando il problema è geometrico, x significa retta, e l'equazione supera il terzo grado. Sia per esempio di quarto, e appartenente alla forma generale $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$. Per il Teorema I i termini tutti son di quarto grado; ma essi non possono certamente concepirsi generati per geometrica moltiplica, e rappresentanti geometriche grandezze. La estensione, oggetto della geometría, non ammette di distinguere in essa che tre dimensioni, e quinci tre specie di grandezze: linea, che è una dimensione qualunque solitariamente per astrazion concepita; superficie, che si concepisce qual l'effetto di una retta lungo un'altra condotta, ed è pure un essere intellettuale astratto; e solido, che si concepisce qual l'effetto di una superficie lungo un'altezza condotta, e se è intellettuale rispetto alla continuità, che vi si suppone, rispetto però all'unione delle tre dimensioni si assomiglia al volume de' veri solidi naturali, cioè de' corpi. Può l'intelletto indefinitamente estendere le tre dimensioni, lunghezza, larghezza, altezza del solido, ma non può oltre il solido salire, e raffigurarsi una grandezza, un volume di 4, di 5, di 6 .... dimensioni, il solido di tre rette prodotto è un limite, oltre il quale, per quanto si sforzi, gli è impossibile andare. Quinci i vocaboli quadrato-quadrato, piano-piano, quadrato-cubo, e piano-solido, cubo-cubo, e solido-solido sì usitati da Vieta, hanno in geometría un suono mostruoso, o piuttosto inane. Per la qual cosa tutti i termini di una equazione del terzo grado più alta non possono aver significazione, nè effetto di moltiplica geometrica; tali termini, prodotti di più di tre quantità, sono, mi si permetta il vocabolo, *iggeometrici*. Che se termini di simil fatta dividansi per le potenze dell'unità in modo, che il residuo del grado loro meno il grado dell'unità, per cui si dividono, non sia, al più, che il 3, cioè se i termini dell' equazione di quarto grado $x^4 + ax^3 + bcx^2 + defx + ghik = o$

si dividan tutti per 1 ad avere $\frac{x^4}{1} + \frac{ax^3}{1} + \frac{bcx^2}{1} + \frac{defx}{1} + \frac{ghik}{1} = o$

o tutti per 1^2 ad avere $\frac{x^4}{1^2} + \frac{ax^3}{1^2} + \frac{bcx^2}{1^2} + \frac{defx}{1^2} + \frac{ghik}{1^2} = o$

o tutti per 1^3 ad avere $\frac{x^4}{1^3} + \frac{ax^3}{1^3} + \frac{bcx^2}{1^3} + \frac{defx}{1^3} + \frac{ghik}{1^3} = o$

io domanderò, che intendasi di fare con qualsiasi di queste divisioni? Se intendasi di trasportare i termini dalla iggeometrica loro natura a natura geometrica, egli non è che aggiugnere al concetto assurdo, onde si parte, un altro concetto assurdo ugualmente; tanto ripugnando il dividere l'iggeometrico essere x^4 per la retta 1, e ricavarne un solido, quanto il moltiplicare un solido per una retta, ed ascendere ad una grandezza geometrica del solido più alta, e di quattro dimensioni composta. Oltre a che, facilmente comprendesi, che a deprimere al solido i termini di una equazione al sesto grado superiore converrebbe dividerli per un grado dell'unità, o sia della retta presa per tale, più alto del terzo, e ricorrerebbe pel concetto geometrico di questo la stessa impossibilità. Onde rendesi manifestissimo esser onninamente per la natura dell'estensione vietato di riguardare come grandezze geometriche di grado n i termini, di tal grado tutti, di una equazione dell'altezza n, allorchè n è maggiore di 3.

Secondo il pensiero del Descartes la podestà x^n non significa che una retta di posto $n+1$ nella progressione continua geometrica $1 : x : x^2 : x^3 : x^4 : x^5 : x^6 \ldots\ldots x^n$, il cui primo termine cioè è la retta presa per unità, il secondo la retta x. L'esposizione però delle rette, che seguono, è incompleta, e la espressione loro completa è $1 : x : \frac{x^2}{1} : \frac{x^3}{1^2} : \frac{x^4}{1^3} : \frac{x^5}{x^4} : \frac{x^6}{x^5} \ldots\ldots \frac{x^n}{1^{n-1}}$. Ed in vero a formar la progressione si dèe così ragionare: $1 : x :: x : \frac{x^2}{1}$; $1 : x :: \frac{x^2}{1} : \frac{x^3}{1^2}$, oppure $x : \frac{x^2}{1} :: \frac{x^2}{1} : \frac{x^4}{1^2 x} = \frac{x^3}{1^2}$; $1 : x :: \frac{x^3}{1^2} : \frac{x^4}{1^3}$, oppure $\frac{x^2}{1} : \frac{x^3}{1^2} :: \frac{x^3}{1^2} : \frac{x^6 \cdot 1}{1^4 x^2} = \frac{x^4}{1^3}$, e così via via. Stando all'esposizione incompleta, i termini della progressione, invece di rappresentar tutti altrettante rette, parrebbero essere grandezze geometriche di grado successivamente più alto, e ritornerebbesi all'assurdo già contemplato, che anzi vi si aggiugnerebbe quello del paragone tra grandezze affatto eterogenee, di retta x a superficie quadrata x^2, di questa a cubo x^3 ec. Questi assurdi si dissipano, e subentrano concetti giusti, e chiari nella espressione completa. Nel formare il termine $\frac{x^2}{1}=\frac{x.x}{1}$ si forma il quadrato della retta x, e subito dividendo per la retta 1 si ha di nuovo una retta; nel formar il quarto termine $\frac{x^3}{1^2}$, moltiplicando la retta x con la retta $\frac{x^2}{1}$, si forma il rettangolo $\frac{x^3}{1}$; e moltiplicando la retta $\frac{x^2}{1}$ per sè stessa si forma il quadrato $\frac{x^4}{1^2}$; e dividendo poi quel rettangolo per 1, questo quadrato per x si ritorna alla retta, ed in genere in moltiplicar la retta x con la retta $\frac{x^{n-1}}{1^{n-2}}$, e divider poi per la retta 1, od in moltiplicar la retta $\frac{x^{n-1}}{1^{n-2}}$ per sè medesima, e divider poi per la retta $\frac{x^{n-2}}{1^{n-3}}$, non si fa che ascendere da retta a superficie, e tosto a retta ricadere. Similmente al voler del Descartes ogni prodotto di due rette date $b\,c$ si dèe considerare come il quarto termine di una proporzion discreta $1:b::c:bc$, e la sua espression completa sarà $\frac{bc}{1}$; ogni prodotto di tre rette date def sarà l'effetto di due proporzioni discrete $1:d::e:\frac{de}{1}$, $1:\frac{de}{1}::f:\frac{def}{1^2}$; onde questa vedesi essere la espression completa di def: e di simil guisa il prodotto di quattro date rette $g\,h\,i\,k$ sarà l'effetto di tre proporzioni discrete, ed avrà a completa sua espressione $\frac{ghik}{1^3}$. Quinci la completa espression dell' equazione di quarto grado $x^4+a\,x^3+b\,c\,x^2+d\,e\,f\,x+g\,h\,i\,k=0$ sarà $\frac{x^4}{1^3}+a\frac{x^3}{1^2}+\frac{b\,c}{1}.\frac{x^2}{1}+\frac{d\,e\,f}{1^2}x+\frac{g\,h\,i\,k}{1^3}=0$.

Scorgesi però qui eterogeneità di grado: il termine primo e l'ultimo sono di un solo grado, e rappresentano linee; li tre intermedj sono di due gradi, e rappresentan superficie. Ma è facile schivare questo incomodo, il qual proviene dal formare per serie separate di proporzioni il coefficiente, e la rispettiva potenza di x, se si leghino insieme le formazioni. Dopo formato il coefficiente $\frac{bc}{1}$ si dica $1 : \frac{bc}{1} :: x : \frac{bcx}{1^2}$, $1 : x :: \frac{bcx}{1^2} : \frac{bcx^2}{1^3}$; similmente $1 : \frac{def}{1^2} :: x : \frac{defx}{1^3}$; e del pari $1 : a :: x : \frac{ax}{1}$, $1 : \frac{ax}{1} :: x : \frac{ax^2}{1^2}$, $1 : \frac{ax^2}{1^2} :: x : \frac{ax^3}{1^3}$; raccogliendo si avrà $\frac{x^4}{1^3} + \frac{ax^3}{1^3} + \frac{bcx^2}{1^3} + \frac{defx}{1^3} + \frac{ghik}{1^3} = 0$; dove i termini tutti sono di primo grado, e rappresentano linea. Giusta tal concetto i termini di una equazione a geometrico problema spettante, qualunque sia l'altezza n, a cui si mostrano, sono in realtà del primo grado, e rappresentan linee rette, nè compariscono di alto grado, che per esser soppresso il grado dell'unità lor divisore; la divisione, anzi che una nuova operazione su i termini stessi per trasferirli da natura a natura, da alto grado al primo, non è che un restituirli nel vero originale loro essere, grado, aspetto; e l'equazione medesima è un complesso, o piuttosto una rappresentazion concentrata di numero n complessi $= 0$ di rette numero $n + 1$, ciascuno, tutte dello stesso ordine di derivazion proporzionale, in quanto derivate per ugual numero di proporzioni continue, o discrete. La dottrina ha un'apparenza soddisfacente; ma rivolgendo la mente alla composizione dell'equazione in genere $x^n + A x^{n-1} + B x^{n-2} + C x^{n-3} \ldots + Q = 0$, per il prodotto delle successive equazioni $x - \alpha = 0$, $x - \beta = 0$, $x - \delta = 0$, $x - \gamma = 0 \ldots$ nulla in tal composizion ci si presenta di quelle proporzioni continue, o discrete, ma sole immediate moltiplicazioni, che generano sì i gradi ordinatamente decrescenti di x, e sì i coefficienti A, B, C.... Il coefficiente per esempio D è la somma dei prodotti delle radici α, β, δ, γ.... a quattro a quattro, questa somma si può concepire uguale al prodotto $ghik$, e questo prodotto si può concepire effetto di tre proporzioni discrete; e l'ultimo termine, che è il prodotto di tutte insieme le radici, si può fingere l'effetto di numero $n-1$ proporzioni discrete; ma tutte queste sono studiate riduzioni, non sono generazioni immediate e naturali. Dunque non presentando per sè la composizione delle equazioni che moltipliche, e non potendo queste, qualora superano il grado terzo, aver significato, ed effetto di moltipliche geometriche, e perciò dovendo necessariamente essere moltipliche aritmetiche ne vien per conclusione:

1.° Ogni equazione algebraica di grado superiore al terzo è in concetto immediato, e naturale un'equazione aritmetica astratta in simboli universali. Poichè essendo ogni suo termine per la ragione di superare il terzo grado una moltiplica aritmetica, e perciò dovendo x, in quanto moltiplicatore, esser concepito astratto, dovrassi anche, per non affiggergli un doppio concetto, concepir tale in quanto moltiplicato; dunque x segnerà numero astratto.

2.° Qualora un'equazione di grado al terzo superiore esca da un problema geometrico, questo non è riguardato da essa equazione che come una sua applicazione, nella quale assegnasi ad x la rappresentazione del rapporto della retta cercata alla retta presa per unità. L'equazione non ha oggetto determinato nè in individuo, nè in specie, ha una mira, una capacità immensa, e non meno che il problema geometrico, onde uscì, comprende tutti i simili problemi di commercio, o di fisica scienza. Queste conclusioni sono anche conformi alla natura dell'algebra, la quale in sè propriamente è un'aritmetica universale: si applica alla geometría, attesa la dipendenza, che questa ha dall' aritmetica nella considerazion de' rapporti, ma l'applicazione le è come accidente; tale però, che produce un sommo reciproco vantaggio, comunicando l'algebra, o sia l'aritmetica astratta universale, alla geometría la sua agilità, e portandola per la sua ampiezza, e spandendo la geometría su di essa il suo lume di evidenza.

3.° In concetto *ridotto* un'equazione di grado qualunque, anche al grado terzo superiore, si può considerare come un complesso, anzi un numero n di complessi $= 0$, di numero $n + 1$ rette, tutte del medesimo ordine di proporzional derivazione, cioè per ugual numero $n - 1$ di proporzioni, o tutte continue, o tutte discrete, o parte continue, parte discrete, ma in legata succession, derivate.

§. V. È tempo di ritornare dopo sì lunga, ma spero non men utile, digressione a Fra Luca, il quale se dritto non vide rispetto al senso delle equazioni, almen di quelle, nelle quali suppose x una linea, e riguardo al valore del più e del meno fra i termini loro; assai giusto però, e limpido vide per tutto ciò che spetta le regole dell'operare intorno al più ed al meno. Incominciando dalle regole della moltiplica, a dimostrare che $-$ moltiplicato in $-$ produce $+$, propone a moltiplicare $a - b$ in $a - b$, ed esemplificata questa generale proposta nella moltiplica di $10 - 2$ in $10 - 2$, dopo aver con le tre prime parti dell' operazione ottenuto $10 \times 10 - 2 \times 10 + 10 \times - 2 = 100 - 40 = 60$, prosegue egli argomentando così: la moltiplica, che resta a fare di -2 in -2 nè può produrre -4, un meno cioè doppio di -2, perchè ne verrebbe $60-4=56$; nè può render *tanto*, cioè lo stesso -2, perchè ne seguirebbe $60-2=58$: dunque deve dar $+4$, un doppio di -2 cangiato in più, con che si ha effettivamente $60+4=64=8\times 8$, come aver si doveva. Ed assomiglia questa fatta di dimostrazione a quella, con che Archimede conclude esser la superficie della sfera quadrupla all'area del cerchio massimo, ed a quella, onde Euclide prova nel Teorema IX del libro XII, che la colonna rotonda è tripla alla sua piramide. Siccome in generali lettere fece la proposta, così con esse accompagna i numeri nei passi della dimostrazione, ciò che a questa dona il pregio di dimostrazione in aritmetica universale, e speciosa, o in algebra secondo l'odierno senso. Nè di tal dimostrazione contentasi il Pacioli; ma trattando in appresso dei recisi vi aggiugne la dimostrazione geometrica, con delineare il rettangolo avente per lati li due recisi $3-\sqrt{5}$, $6-\sqrt{20}$, che riuscendo uguale al rettangolo della linea 3 nella linea 6, meno l'aggregato dei due formati dalla retta recisa $\sqrt{5}$ nella retta 3, e dalla recisa $\sqrt{20}$ nella 6, più quello formato dalle due recise $\sqrt{5}$, $\sqrt{20}$, appalesa, e mette sott'occhio essere $-\times-=+$. Dissi già convenire nella sostanza le geometriche dimostrazioni dello scoliasta di Diofanto, e di Fra Luca. Dalle regole per la moltiplica deduce questi le regole per la divisione ommesse da Diofanto e dallo scoliasta di lui, indi passa a quelle della somma, e procede dipoi a quelle della sottrazione, le quali dichiara minutamente distinguendo 12 casi, che tutti si raccolgono nella formola $\pm a-(\pm b)$, immaginando per ciascuna delle 4 combinazioni de' segni tre ipotesi, 1.ª di $b<a$, 2.ª di $b=a$, 3.ª di $b>a$.

§. VI. La sottrazione $a-b$, allorchè $b>a$, genera la quantità negativa, il *puro meno* dice Fra Luca *de quantità, e anche de denominazione*; ecco l'origine della idea della quantità negativa. E sebbene da ciò che Fra Luca soggiugne: *E venga che tal parlare paja alquanto diforme, e incongruo; ma bisogna usar vocabuli alquanto strani a ciò più facilmente saprenda l arte*: sembrar possa che stesse intorno la mente di lui e degli analisti di quel tempo non lieve tenebría, ciononostante scrivendo egli altrove, pag. 113, esser *chiaro che* -4 *è manco del nulla, e per conseguenza debito*: ciò basta a manifestare il lume che aveano acquistato. Ed io contrapporrò al corto dir di Fra Luca il diffuso ragionar del Wallis nel capo IV del Volume I: *Impossibile est ut quantitas major ex minore desumi possit (cum pars suo toto major esse nequeat). Adeoque si quando illud praestandum proponatur, propositum est impossibile. Verbi gratia impossibile est, ut ex 5 subducantur 8, cum numerus hic sit illo major. Nihilominus, quanquam hoc sit reapse impossibile, non raro tamen apud arithmeticos praesertim algebristas, tanquam esset possibile, praestari jubetur: supponunt enim, praeter reales quantitates, quantitates quasdam imaginarias, quae minores sunt quam nihil, quas quantitates Negativas, sive Ablativas appellant ..... Adeoque si ex 5 auferenda sint 8, manere dicunt* -3, *hoc est quantitatem, quae sit numero ternario minor quam nihil. Hujusmodi autem (quae supponuntur) quantitates negativae, quanquam videri possint non sine absurdo supponi, suos tamen habent usus eximios, neque sine magno commodo ab arithmeticis (geometris item aliisque mathematicis) introducuntur: ut suo loco aliquando patebit. Hic autem sufficiet ostendere eam suppositionem nihil absurdi supponere. Dum enim dicunt* $5-8=-3$, *idem est ac si dicerent: qui supponit* 8 *ex* 5 *demi, supponit ille aliquid ternario numero minus quam nihil (qui enim supponit* 8 *hoc est* 5 + 3 *ex* 5 *subduci, supponit ille totum quinarium sublatum esse, atque insuper* 3*, plus quam totum, adeoque restare tanto minus quam nihil). Atque hoc quidem non magis incommode dicitur quam hoc: qui supponit Hircocervum, supponit ille animal quiddam ex Hirco et Cervo conflatum: quae propositio vere enunciari potest, quanquam neque Hircocervus, neque animal ita conflatum existat, aut quidem existere possit. Potest enim propositio vera esse, quamvis, neque praedicatum, neque subjectum actu existat, aut quidem sit possibile. Ita quamvis, neque sit possibilis quantitas* — 3, *neque* 5 — 8, *tamen verum est has quantitates (supposititias licet) aequales esse, atque, qui alteram supponit, reliquam etiam supponere: et quidem qui dicit* 5 — 8 = — 3, *non modo dicit subductionem illam* 5 — 8 *impossibilem esse, sed ostendit mensuram impossibilitatis: nempe numerum* 8 *tanto majorem esse quam ut possit ex numero* 5 *subduci, quantus est numerus* 3. *Sic qui habet* 5, *sed debet* 8 *(habere dicitur computatis computandis)* — 3*; hoc est minus quam nihil, seu (quod tentandum est) debere* 3. Giudichi il leggitore su i titoli di supposititizie, di immaginarie attribuiti alle quantità negative, su la impossibilità di 5 — 8, e di — 3, e su la verità ciononostante della equazione 5 — 8 = — 3 difesa con il bel paragone della proposizione intorno all'Ircocervo, giudichi tra l'analista del secolo XVII e l'analista del secolo XV, Wallis termina come Fra Luca; ma premette un discorso troppo sconveniente alla retta idea, in cui termina. Rivolgendoci a considerare con un po' più d'attenzione il dire di Fra Luca, merita primieramente riflesso l'appellazion da lui adoperata di *puro meno*, appalesandoci questa, che egli distinse nel meno due stati: 1.° il trovarsi fra due termini di una quantità complessa, come in $a-b$, significando sottrazione; ed il trovarsi 2.° libero e da sè, come in -4, non significando che modo di quantità: onde apparisce, che si rappresentò la quantità negativa nell'idea più incomplessa, più precisa, che le conviene. Egli asserisce esser il puro meno manco del nulla, ciò che suscitar potrebbe difficoltà; ma la conseguenza, che ne tira, che dunque è debito, manifesta il senso dell' asserzione, e che non del nulla assoluto, ma di un nulla relativo, di modo, qual è il nulla di possesso, intese asserire esser manco il puro meno. Io non trovo nel parlar di Fra Luca altro difetto, che quello di non esser generale, rappresentando la quantità negativa in un debito, che non è che una specie particolar di quantità negativa, e non può prendersi che per un esempio della idea generale. Ma d'altra parte si ha egli diritto di pretendere, che l'idea della quantità negativa fosse nel suo nascere di tutta la competente estensione fornita? Il positivo, e negativo nell' algebra sono in generale contrarj modi, contrarj riguardi di una quantità, o contrarie quantità. Il moto all'oriente, ed il moto all'occidente sono due contrarj modi di muoversi, due contrarj riguardi del moto. Egli è in libertà di prender questo, o quello per positivo; ma scelto l'uno a positivo, l'altro dicesi negativo. In astronomia si considera per positivo il movimento de' pianeti da occidente in oriente secondo la successione dei segni dell'ecclittica, e per negativo in conseguenza il moto dei nodi delle orbite loro, costretta l'orbita dell'uno per l'azion dell'altro pianeta a strisciarsi su l'orbita di lui da occidente in oriente contro l'ordine de' segni. Vi ha ragione di dare la preferenza, e il titolo di positivo al moto de' pianeti da occidente in oriente, essendo esso per la newtoniana teoría il primario; e avanti di tale eccelsa teoría ragion era di anteporlo, e prenderlo a positivo l'essere il più cospicuo. Ma un nocchiero, il quale proposto si fosse di diriggere ad occidente il corso della nave sua, e da contrario vento spinto venisse ad oriente, conterebbe qual positivo quel corso ad occidente, che far voleva, e qual negativo, questo contro sua volontà ad oriente fatto. Una qualche ragione sempre seguiamo, o ci rappresentiamo per determinarci ad assegnare tra due modi o rispetti di una quantità ad uno piuttosto che all'altro, la qualificazione di positivo; ma la ragione, or è intrinseca or estrinseca, or grave or leggiera, or assoluta or relativa. Noi posti tra l'equatore, ed il polo boreale facciamo positiva la geografica latitudine boreale, e la boreal astronomica declinazione, e i nostri antipodi, e tutti generalmente i popoli tra l'equatore ed il polo australe faranno positiva la geografica latitudine australe, e l'austral astronomica declinazione, che per noi divengono negative. Talvolta ci conduce una ragione di abito, alla quale non poniamo riflesso: così se da un punto si conduca una linea a destra, un'altra nella medesima direzione a sinistra, siamo inclinati a prendere, e prendiamo ordinariamente per positiva la retta che si stende a destra, e per negativa quella che si stende a sinistra, perchè il nostro scrivere, e concordemente il nostro delineare va da sinistra a destra: gli orientali, che scrivono da destra a sinistra prenderebbero per positiva la linea stendentesi dal segnato punto a sinistra. In ciò che spetta il nostro essere o fisico, o sociale prendiamo per positivo quel modo che lo migliora, e per negativo quello, che lo peggiora; e la ragione è generale, assoluta, l'amore che ogni essere di sentimento fornito per natural legge ha a sè stesso. Quinci essendo per noi meglio l'aver crediti che l'aver debiti, consideriamo per quantità positiva il credito, e per quantità negativa il debito. In due movimenti contrarj, uno ad oriente, l'altro ad occidente, uno positivo, l'altro negativo vi ha lo, zero o sia il nulla dell'un moto e dell'altro. È chiaro che il moto negativo ad occidente è un esser fisico ugualmente che il moto positivo ad oriente, e conseguentemente sarebbe la cosa più assurda che mai il dire, che il moto negativo è meno del niente assoluto, o del niente di moto, importando il moto negativo, non altrimenti che il moto assoluto, la presenza, l'azione di una forza motrice, che lo cominciò, che lo continua. Cionullaostante si può dire, che il moto negativo è meno del nulla dei due moti in senso relativo, e di proporzione aritmetica, nel senso che vi ha maggior differenza o distanza tra il moto negativo, e il moto positivo, che tra il nulla dei due moti, ed il moto stesso positivo: un nocchiero, che avesse voluto andare ad oriente si stimerà certamente più contrariato nel suo scopo, se da forza di oriental vento trovisi spinto ad occidente, di quello che se per ostinata bonaccia fosse stato costretto a starsi immoto. Similmente in deterior condizione reputerassi chiunque se abbia egli debito, di quello che se non avesse nulla: vi ha maggior intervallo dal debito al credito, che dal nulla dell'uno e dell'altro al credito medesimo; ed in questo senso chi può negare, che il debito sia meno che l'aver nulla?

Consideriamo le quantità positive e negative astrattamente per aritmetica, rappresentandole per numeri positivi, e negativi, e formiamo la progressione aritmetica

$+n \dots +4, +3, +2, +1, 0, -1, -2, -3, -4 \dots -n$.
Questa progressione va evidentemente decrescendo per i numeri positivi $+n \dots +6 +5 \dots$ sino a zero, e conceder pur devesi, che proseguisca a decrescere da 0 per i numeri negativi $-1, -2, -3 \dots -n$: altrimenti non sarebbe progressione aritmetica uniforme e continua, quale indubitantemente è, e manifestasi, se si prenda il doppio di qualsivoglia termine, e si confronti con l'aggregato di due qualunque da esso equidistanti di qua e di là, trovandosi tal doppio a cotal aggregato uguale. Decrescendo dunque in 1.° luogo la progressione da 0 a -1, è giuoco forza riconoscere che -1 è minore di 0; e continuando in 2.° luogo a decrescere per i numeri negativi, ne segue esser questi tanto minori, quanto è maggiore il numero negativamente preso, e del segno $-$ affetto: laonde essendo -1 minore di 0, tanto più lo è $-n$, posto n maggiore di 1.

Le quantità positive e negative separate per lo zero loro ci si mettono a dir così sott'occhio nella geometria. Intendasi alla retta CB (*Fig.* 9.) sovrapposta la retta uguale CA; indi si concepisca, che immota quella, si elevi questa ad angolo sopra di essa, e si aggiri intorno al punto ad ambedue comune C, sinchè torni a coincidere con la medesima retta CB: la retta CA avrà descritto un cerchio avente essa per raggio, e sarà la stessa CA passata per tutti gli angoli dal nulla, dirò così, angolare ai quattro retti. Sieno CD, CE, CF, CG, CH, CI, CK alcune delle vestigia dalla retta CA segnate nel giro, delle quali CG sia nella direzione di CB, e formi congiuntamente il diametro GB, le due EC, IC sieno su GB nel centro C perpendicolari, e formino insieme il diametro EI. Dai punti D, F, H, K conducendo sul diametro GB le perpendicolari DM, FN, HP, KQ, la perpendicolare DM è detta seno dell'arco BD, e dell'angolo per esso misurato BCD, e l'intercetta fra il punto M del diametro GB, in cui cade la perpendicolare DM, ed il centro C è di tal arco, e di tal angolo appellata il coseno; la perpendicolare FN è il seno, e la intercetta NC il coseno dell'arco BF e dell'angolo BCF; la perpendicolare HP il seno, e l'intercetta PC il coseno dell'arco BGH e dell'angolo BCH considerato alla parte di esso arco; la perpendicolare KQ il seno, e la intercetta QC il coseno dell'arco BGK e dell'angolo BCK considerato alla parte dell' arco medesimo BGK. Sono evidenti le contrarie posizioni dei due seni DM, FN e dei due HP, KQ, quelle sopra, queste sotto il diametro GB; e le contrarie tendenze dei coseni CM, CQ e dei due CN, CP dal centro C, quelle da C a destra, queste dallo stesso C a sinistra: dunque per significar questa contrarietà, valendoci dei termini di positivo e negativo, presi ad arbitrio per positivi i seni di una posizione ed i coseni di una direzione saranno negativi i seni di contraria posizione, ed i coseni di contraria direzione. È naturale preferire, e rappresentarsi per positivo sì il seno, che il coseno dell'angolo conceputo primo a generarsi, qual è nella figura nostra l'angolo BCD, se fingasi della somma acutezza. In seguito a tal preferenza saran positivi tutti i seni, che hanno la medesima posizione con il seno di tal angolo, cioè i seni di tutti gli archi, ed angoli terminanti nel primo generato semicerchio BEG, o sia non maggiori di 180 gradi; e negativi saranno i seni tutti di contraria posizione, cioè i seni degli archi, od angoli tutti terminanti nel secondo semicerchio, o maggiori di gradi 180. De' coseni, saran positivi tutti quelli, che come il coseno dell'angolo BCD hanno la direzione dal centro C verso destra, e per conseguenza i coseni di tutti gli archi ed angoli terminanti nel semicerchio EBI composto dei quadranti BE, IB, cioè del primo e dell' ultimo a generarsi, o sia degli archi ed angoli non minori di 90 gradi, o maggiori di 270; e saran negativi i coseni di tutti gli archi ed angoli terminanti nel semicerchio EGI composto dei due quadranti EG, GI, vale dir del secondo e del terzo in generazione, o sia di tutti gli archi ed angoli tra li gradi 90 e li 270. Il passaggio, sia del seno, sia del coseno, da positivo a negativo si fa per lo zero, o nulla respettivo. Nel crescere dell'angolo BCD cresce il seno DM, ma diminuisce il coseno CM, cosicchè arrivando l'angolo BCD alla grandezza del retto ECB, il seno diviene uguale al raggio, ma il coseno va a nulla; continuando l'angolo a crescere, e facendosi ottuso, qual BCF, diminuisce il seno dalla sua massima grandezza, ed il coseno passato per il suo nulla esce negativo, qual è CN. Nel giugner l'angolo ottuso BCF alla grandezza di due retti, o sia l'arco BCF a gradi 180 in G, cade il seno nel nulla suo, diventando il coseno uguale al raggio negativo CG. Proseguendo l'angolo, e l'arco a crescere oltra il punto G, esce il seno dal nulla, ma negativamente, qual vedesi HP, ed il coseno retrocede dal punto estremo G ad un punto verso C come a P: ricade questo nel suo nulla per rinascer positivo, quando l'angolo e l'arco cresce sino in I, ed il seno pervenuto all'estrema sua grandezza negativa CI ripiglia cammino verso il suo zero in B. Non è della tangente, come del seno, e del coseno: ella passa dal suo positivo al suo negativo per il suo infinito. Condotta al punto B una retta infinita X, Z tangente del cerchio, e prolungato il raggio CD sino ad incontrare essa retta infinita in T, la intercetta da questo punto a B dicesi la tangente dell'angolo BCD, e dell'arco BD. Nel rivolgersi del raggio CD da B in E, è chiaro, che la tangente BT va continuamente crescendo, trasferendosi il punto T ognor più verso il punto infinitamente distante X; allor quando il raggio CD giugne in CE formando l'angolo retto BCE, essendo la sua direzione parallela alla direzione della retta BX, egli è impossibile, che prolungato quanto si voglia vada con questa ad incontrarsi: la tangente dell'angolo retto BCE, o del quadrante di cerchio BE dicesi infinita, cioè sopra ogni possibile grandezza, in quanto appunto non vi è distanza, per grande che fingasi, alla quale CE, BX concorrano insieme. Per poco che il raggio girante pieghi dalla perpendicolar situazione CE verso G, e l'angolo da retto si faccia ottuso, la direzione di esso raggio di parallela alla XZ si fa ad essa convergente alla banda Z: quindi ogni angolo ottuso, ed ogni arco terminante tra E, G ha la sua tangente diretta da B alla regione Z; per esempio l'angolo BCF, o l'arco BF ha per tangente BT', essendo T' il punto, in cui la direzione del raggio FC concorre con la retta delle tangenti XZ. Essendo contrarie le direzioni delle tangenti BT, BT' eletta la prima a positiva sarà la seconda negativa. Si passa dunque da tangente positiva a tangente negativa per tangente infinita: e non è questo il solo caso del passaggio dal positivo al negativo per l'infinito, molti altri porgendone la teoría delle curve: laonde due passaggi hanno distinto i Geometri dal positivo al negativo; l'uno per lo zero, per l'infinito l'altro. Ma a formar una giusta, e distinta idea di questi due passaggi, e della differenza loro, bisogna avvertire, che il passaggio da positivo a negativo per lo zero è rispetto ai primi elementi loro, ed il passaggio all'incontro per lo infinito è rispetto alle estreme loro grandezze. Si concepiscano due angoli, uno inferiore, l'altro superiore al retto, ma sì prossimi a lui, che solamente a lui instesso non si uguaglino: la tangente del primo al retto inferiore sarà la estrema tra le tangenti positive nella regione da B verso X; e la tangente del secondo al retto superiore sarà la estrema tra le tangenti negative nella regione da B verso Z: tra l'una e l'altra vi ha la tangente infinita, la quale conseguentemente fa la comunicazione tra le estreme grandezze di tangente positiva, e di tangente negativa. Crescendo l'angolo ottuso CBF, il punto T' si avvicina a B, e cresciuto l'angolo CBF sino ai due retti in G, il punto T' cade in B, e la tangente negativa BT' si annulla; poi continuando l'angolo a crescere oltre i due retti, la tangente rinasce positiva da B verso T: la tangente dunque negativa passa dal suo menomo elemento al menomo elemento della positiva per lo zero; e così apparisce, che la tangente ha due comunicazioni tra il suo positivo ed il suo negativo; una per lo zero in B tra i menomi elementi, l'altra per lo infinito ad infinita distanza da B tra le estreme grandezze; laddove il seno ed il coseno non hanno tra il positivo ed il negativo loro che una sola comunicazione, un passaggio solo dall'uno all'altro, cioè per lo zero. Alle rette chiamate sin qui seni, e coseni si può in luogo di queste trigonometriche idee affiggere idee più generali di ordinate ed ascisse: anzi son queste le idee loro più immediate. Ed è chiaro per il triangolo rettangolo, che formano il raggio, una ascissa qualunque, e la rispettiva ordinata, che indicando per r il raggio, per x in generale l'ascissa, per y l'ordinata, sarà generalmente $r^2 = x^2 + y^2$, e quinci $y^2 = r^2 - x^2$, per conseguenza $y = \pm \sqrt{(r^2 - x^2)}$. Per questa equazione, che altro in fondo non esprime che la proprietà già da Euclide dimostrata di una perpendicolare qualunque y sul diametro, di esser media proporzionale tra i semmenti di esso $r + x$, $r - x$, si può concepire il cerchio descritto in altro modo, che per rotazion d'una retta. Assegnati ad x tutti i valori da o ad r, e da o a $-r$, per ciascheduno dei valori verranno determinate due ordinate y, una positiva, l'altra negativa, e così riceveran simultanea determinazion due rette contrariamente poste, sopra, e sotto il diametro GB, che nella descrizion per rivolgimento del raggio aveano una determinazion disgiunta, più o meno: le estremità di queste due contrarie ordinate noteranno due punti del cerchio, uno sopra, uno sotto il diametro, e similmente tutte le altre, e la continua serie de' punti notati comporrà la circonferenza del cerchio. A concepir più chiaro, si ponga $x = o$, con che si avrà $y = \pm r$ cioè le due ordinate y saranno quelle al centro CE, CI; indi s'immagini, che la retta EI scorra a sè parallela da C in B diminuendosi, od accorciandosi, e sopra, e sotto il diametro GB continuamente, di modo che per la metà superiore e per la metà inferiore si avveri sempre $y = \pm \sqrt{(r^2 - x^2)}$; ed in simil guisa s'immagini, che scorra da C in G; la ordinata positiva CE avrà ne' due suoi scorrimenti descritto il semicerchio BEG, e la ordinata negativa CI il semicerchio BIG; perciò il semicerchio BEG si dirà positivo, ed il semicerchio BIG negativo, e ciascuno dei semicerchj si potrà considerare siccome composto di due rami, l'uno da E, o da I tendente e terminante in B, l'altro da E, o da I terminante in G. In vece che la retta EI nello scorrere a sè stessa parallela verso B, o da C verso G si diminuisca ad ambe le estremità continuamente con un rapporto al suo scorrere medesimo, quale esprime la equazione $y = \pm \sqrt{(r^2 - x^2)}$, si può immaginare, che diminuisca in un altro rapporto qualunque espresso per una equazione ad arbitrio e gettata in carta a caso, ed in luogo di diminuire da una certa grandezza si può fingere per l'opposto, che cresca da una data grandezza, od anche da zero. E per ciò che spetta al rotar di una retta, in vece che essa rimanga costante, come nella descrizione del cerchio, è lecito concepire che si accorcj, o si allunghi, che prenda nel primo istante della rotazione nascimento, e cresca dallo zero a qualunque grandezza, che varj in qualsivoglia modo, ed in qual più piaccia rapporto al suo moto di rotazione, che dopo una rotazione ne faccia altra ed altra all'infinito. È infine permesso rappresentarci, che la retta, o scorrente a sè parallela, o girante, in cambio di muoversi uniformemente, acceleri, o ritardi con qualunque legge il moto suo, ed eziandío, che dopo un tratto di moto, o parallelo, o giratorio in una direzione, dia addietro continuando ad allungarsi, od accorciarsi. Qual immenso numero di curve diverse! Movimenti in contrarie direzioni, acceleramenti e ritardamenti, allungamenti ed accorciamenti, e sopra e sotto una segnata retta, sono tante sorte di quantità positive, e negative, che considerate nelle infinite combinazioni, negli infiniti rapporti diversi dilatano senza misura l'intendimento nella illimitata ampiezza della geometría curvilinea. Si può dire la scienza del positivo e negativo e dei passaggi dall'uno all'altro per lo zero o per l'infinito il criterio delle proprietà delle curve. Egli è per le ordinate positive, o negative che si determina la posizione dei loro rami. Egli è il passare della sottotangente da positiva a negativa per lo infinito, che ci addita l'ordinata massima o minima, ed è la positiva, o negativa variazione d'ordine pari, che sussiste, dell'ordinata medesima, annullandosi le variazioni tutte degli ordini antecedenti, la quale ci distingue se minima sia o massima essa ordinata. Egli è il raggio osculator positivo o negativo, che ci dimostra all'asse dell'ascissa rivolta o la concavità, o la convessità della curva, ed è il passaggio del raggio osculatore per lo zero, che ci avverte, che la curva ha un flesso contrario, cioè di concava si volge in convessa, o reciprocamente, continuando però alla medesima banda il suo corso: per l'opposto è il passaggio del raggio osculatore per l'infinito, che ci istruisce, che la curva in piegarsi di concava in conversa, o scambievolmente, ritorna insieme addietro, ed unisce ad un flesso contrario un regresso. Egli è..... Ma basta ad appalesare l'uso del positivo, e del negativo, e dei passaggi dall'uno all'altro nell' alta geometría.

Nella fisica non passa fra tutte le quantità positive e negative la stessa differenza, e lo zero non è sempre un vero nulla dell'una e dell'altra; onde nei concetti di positivo, e negativo, e di zero deve il fisico usar delle distinzioni, senza le quali confonderebbe insieme idee assai diverse, ed incorrerebbe in gravi errori. Newton, il fisico, che assistito dalla più sublime geometría fabbricò il sistema dell'attrazione, riconobbe nella natura oltre l'attraente forza una forza repellente, e nella XXXI delle quistioni, con le quali coronò la esimia sua ottica, scrisse, che siccome nell'algebra, dove svaniscono, e cessano le quantità positive, ivi le negative cominciano; così nelle cose meccaniche, dove termina l'attrazione, ivi succeder debbe la forza repellente: *Sicuti in algebra ubi quantitates affirmative evanescunt, et desinunt, ibi negativae incipiunt; ita in mechanicis, ubi attractio desinit, ibi vis repellens succedere debet*. L'Alembert nella *Enciclopedia* all'articolo *Repulsif* accusò di matematico più che fisico il ragionamento del Newton. Il Boscowich però seguendo la idea di lui si rappresentò nella natura una forza, che, secondo una legge di distanze alterni di attrattiva in repulsiva, e di repulsiva in attrattiva, e geometrizzò il suo pensamento in una curva con varie serpentine flessuosità ascendente sopra, e discendente sotto l'asse delle ascisse, o sia delle distanze, e con esse flessuosità esponente le varie attrazioni, e repulsioni, che si danno a vedere nei chimici, o fisici fenomeni terrestri; ma nel principio fornita di un ramo infinito, e su di ascissa infinitamente piccola di ordinata negativa infinitamente grande, esprimente in una repulsiva energía infinita la impenetrabilità, anzi la impossibilità di contatto fra i per lui inestesi elementi della materia; ed all'estremo scorrente con un ramo infinito positivo, assintotico all'asse, della natura quasi di un ramo d'iperbola di terzo grado, segnante nelle ordinate sue via via decrescenti in ragion quadrata delle crescenti ascisse il diminuire dell'attrazione tra le grandi moli disseminate per la immensa vastità de' cieli: della qual maniera si persuase l'autore di aver composta la teoría della natura ad una sola legge ridotta. Sorse nondimeno ad impugnarla, ed un'altra proporne lo Scarella. In vece di concepire in tutte le particelle della materia una forza al variar delle distanze variante, e trasformantesi, or in attrattiva, or in repulsiva, gli parve meglio porre nella natura un elemento, le cui particelle sieno dotate di una forza repulsiva fra loro, sebbene tutte rispetto le altre particelle di materia animate della comune virtù attrattiva. Per questa virtù attrattiva l'elemento repellentesi è mescolato al rimanente della materia: la forza repulsiva delle particelle di esso combatte l'attrazione delle altre particelle di materia fra loro, ed è reciprocamente da essa combattuta: se prevalga la forza repulsiva delle particelle dell' elemento, le particelle di materia, dalle quali son esse circondate, sono ad onta dell'attrazion loro rimosse le une dalle altre, ed apparisce anche in queste la repulsione, che realmente è in quelle; accade il contrario se l'attrazion sia più potente, questa ha il suo effetto, e le particelle di materia si avvicinano; lo stato di permanenza delle particelle di un corpo in date distanze fra loro è quello dell'equilibrio tra gli sforzi dell'elemento repellentesi, e gli sforzi dell'attrazione. La ripulsione è come un effetto dal centro alla circonferenza, l'attrazione un effetto contrario dalla circonferenza al centro. Senza questo repellentesi elemento intermedio le particelle della materia si unirebbero tutte in una densissima massa intorno a un centro; siccome per l'opposto fingendo tolta l'attrazione, sparirebbe ogni legame di particelle di materia, non vi sarebbe più corpo. Sono queste le idee dello Scarella, alle quali aggiugnendo la dottrina di Boerhaave, essere il fuoco per ogni dove sparso la causa, che gli altri corpi non si condensino, quanto sarebbe possibile, o sia quanto vorrebbe la forza attrattiva delle molecole, onde sono composti, conchiude in fine essere il fuoco l'elemento repellentesi, repellente le molecole dell'altra materia, tra le quali trovasi chiuso, operatore delle dilatazioni, de' vapori, cagione della elasticità. Sistema sì fatto dello Scarella, da questo sublime Fisico sin dall'anno 1756 esposto nel tomo II della sua *Fisica generale* è tanto simile al recente sistema chimico del prestantissimo Lavoisier, che, a dir con tutta schiettezza la verità, in leggendo il primo capo dell'aureo suo *Trattato elementare di Chimica*, da esso dato in luce l'anno 1789, sostituito il fuoco al calorico, ritornava quasi ad ogni tratto la mente sul volume da parecchj anni letto dello Scarella. Il trasferir eziandío contro il volere del Newton dai grandi corpi, e dalle grandi distanze alle piccole molecole della materia, ed alle piccole distanze la legge dell'attrazione in ragion diretta della massa ed in ragione inversa del quadrato delle distanze, computando l'influenza che nelle attrazioni nelle piccole distanze ha la varietà delle figure delle particelle della materia a cagione della varietà che importa nelle distanze dei diversi punti della particella: tutto ciò, del che da' francesi autori, e dal Morveau precipuamente, e ne' suoi *Elementi di Chimica*, e nella parte chimica dell'*Encicloped. Metod.*, articolo *Affinité* si fa al Buffon tanto plauso: trovasi con mature discussioni, e con sottili calcoli già fatto dallo Scarella. Non è già mio intendimento il crear dubbio, che Lavoisier, e Buffon abbian pensato e veduto da loro stessi; solo vo' dire, che li precedette l'italiano Scarella: ed in un'opera, nella quale ho in mira di rivendicar i diritti dell'Italia su l'analisi, non ho voluto lasciare sfuggire l'occasione spontaneamente presentatamisi di rivendicarne due diritti di anteriorità su la fisica. Vengo al mio proposito. Esistendo in natura due contrarj effetti, attrazione, e repulsione, o sieno due contrarj modi di agire di una forza trasformantesi, come volle il Boscowich; o piuttosto secondo lo Scarelliano e Lavoisieriano sistema due azioni di contrarie forze; presa in algebraici termini a positiva l'attrazione, sarà la repulsione una quantità negativa, e saranno esse due quantità, positiva, e negativa, in fisico esser contrarie. Con la contrarietà tra la forza attraente, e la forza repellente bisogna non confondere la contrarietà tra la forza centripeta, e la forza centrifuga, essendovi grande differenza, sebben comunemente non avvertita. A porla in chiaro: sia ad un corpo in A, tendente per forza centripeta ad un corpo situato nel centro C, impressa la forza di projezione per la retta AP, e sia la velocità dell'azione istantanea della forza centripeta nel corpo A prodotta verso C alla velocità della forza di projezione, come la retta Aa alla retta AB: il corpo A per forza composta scorrerà la diagonale At; proseguirebbe per la medesima forza composta lungo essa diagonale da t in D, se in t non ricevesse una nuova azione della forza centripeta generante in lui verso C la velocità tb: composta questa con la già composta tD percorrerà il corpo la diagonale tu, nella direzion della quale continuerebbe a correre da u in E, se una azion novella della forza centripeta non lo spignesse verso C con una velocità uc, composta la quale con la già duplicatamente composta uE descriverà il corpo la diagonale uz: così via via procedendo, apparisce che il corpo descrive ogni nuova diagonale, o sia ogni nuovo elemento di curva per una nuova sovracomposta velocità. Si tirino dal centro C le rette CB, CD, CE, su le quali si prendano le distanze Cm, Cn, Cp, tutte uguali alla CA. Per impulso della forza di projezione scorrendo il corpo da A in B allontanato sarebbesi dal centro della quantità Bm; per impulso della forza composta At, proseguendo il corpo per tD, sarebbesi allontanato dal centro C della quantità $Dn - Bm$; per impulso della forza duplicatamente composta tu continuando a muoversi nella direzione di questa da u in E sarebbesi allontanato dal centro C della quantità $Ep - Dn$. Si può nel corpo in A a cagione della forza di projezione, che lo dirigge per AB, concepire uno sforzo mediato, ed indiretto di allontanarsi dal centro per mB; e nel corpo stesso in t a cagione della forza composta At, che lo sospigne per tD, si può concepire uno mediato indiretto sforzo di allontanarsi vie più dal centro C, di quanto Dn è maggior di Bm; e similmente dicasi del corpo arrivato al punto u, poi al z, e generalmente a qualunque altro punto della curva, dal quale proseguendo il corpo per la forza ultimamente composta nella direzione della diagonale in virtù di essa descritta si allontanerebbe dal centro. Or egli è questo sforzo mediato, indiretto di allontanarsi dal centro conceputo nel corpo, che intender devesi sotto il nome di *forza centrifuga*. Supposte le diagonali At, tu, uz...... elementi infinitamente piccoli di curva, i prolungamenti loro tP, uE,..... vanno ad essere le tangenti della curva nei punti t, u.... Le forze, per le quali il corpo sarebbe determinato a scorrere lungo tali tangenti, si chiamano forze tangenziali; e dal dimostrato chiaramente apparisce essere le stesse composte forze, con le quali sono stati descritti i rispettivi infinitamente piccoli archetti conceputi in esse tangenti prolungati. Quattro cose adunque convien distinguere nel moto curvilineo: 1.ª la forza centripeta; 2.ª la forza di projezione; 3.ª la forza tangenziale; 4.ª la così detta forza centrifuga. La forza di projezione può anch'essa appellarsi forza tangenziale, riuscendo la sua retta AP tangente della curva nel primo punto A; ma si dirà tangenziale *iniziale* per distinguerla con questo aggiunto da qualunque altra forza tangenziale seguente, dalla quale differisce in esser essa semplice, laddove ciascuna delle tangenziali, che le succedono, è composta, e tanto più, quanto più è da essa distante. La forza tangenziale iniziale, o di projezione, forza che in un istante fu impressa, e dalla quale sola seguíto ne sarebbe un semplice moto equabile, è in natura diversa dalla forza centripeta, forza continuamente attiva, che ad ogni istante rinnova l'azion sua, e dalle cui sollecitazioni si genererebbe un moto accelerato, diversa è pur la direzion dell'una dalla direzion dell'altra: ma nè quanto alla natura, nè quanto alla direzione si presenta in esse quella diametral contrarietà, che vi è tra la forza attrattiva, e la forza repulsiva; e molto meno il concetto di contrarietà tale trasportar si può alla forza centripeta in confronto ad una qualunque delle forze tangenziali dall'iniziale diversa, e composta di essa iniziale, e di un numero di azioni della forza centripeta medesima. La forza centrifuga non è propiamente un esser fisico, il quale esista distintamente dalla forza tangenziale; è un concepimento nostro di un effetto mediato indiretto di essa, e piuttosto che forza centrifuga le converrebbe il nome di *conseguenza centrifuga*. Proseguendo tuttavía a servirmi dell'usitato nome, osservisi, che la direzione della forza centrifuga in n, per esempio, è nella figura nD, laddove la direzione della forza centripeta è Du parallela a tC, ma essendo l'angolo DCb infinitamente piccolo, sarà anche tale l'alterno uguale nDu; nel triangolo nDu sarà il lato nu infinitesimo di secondo grado, essendo Du, Dn infinitesimi di primo; nel triangolo unC sarà l'angolo uCn infinitesimo di secondo grado, e conseguentemente nel triangolo

D u C l'angolo *D u C* un ottuso di un infinitamente piccolo di primo e di altro di secondo ordine distante da due retti: quindi, giusta la teoría degli infinitamente piccoli, l'angolo di due retti sarà il limite dell'angolo ottuso *D u C*, cioè per considerar l'angolo *D u C* nel suo limite, come fa di bisogno ad aver un moto, non per un poligono, ma per una curva continua, il punto *u* si deve trasportar con il pensiero in *n*, distender l'angolo *D u C* nella direzione *D n C*; onde, la retta *D u* cadendo su la retta *D n*, la direzione della forza centripeta da *D* in *n*, e la direzione della centrifuga da *n* in *D* divengono contrarie, e le forze stesse fra loro uguali. Per la contrarietà delle direzioni si potranno le due forze centripeta, e centrifuga algebraicamente riguardare come due quantità, una positiva, l'altra negativa; ma non sarà mai, che sieno un positivo e negativo in esser fisico contrarj, e da assomigliarsi al positivo e negativo della forza attraente, e della forza repellente. Può essere la direzione della tangente tale, che in vece di allontanare dal centro il corpo conceputo lungh'essa scorrente, glielo avvicini, e così accade se l'angolo *P A C*, se l'angolo *D t C*, od altro della tangente con il raggio sia acuto: e quinci or l'accelerarsi, or il ritardarsi del moto nell'elissi, che dicesi il suo variar positivo, e negativo. Non è qui il luogo di diffondermi, quanto sarebbe bene a tutta rettificarne la teoría, su la forza centrifuga: il detto basta allo scopo presentemente contemplato. Ritorno per un momento ai movimenti in astronomía distinti, qual positivo e negativo, de' pianeti e delle orbite loro l'una su l'altra. Ciascun pianeta rivolgerebbesi intorno al Sole in un certo piano determinato per la retta di projezione, se altra forza d'attrazion non sentisse che quella del Sole; ma egli sente insieme l'attrazione di ogni altro pianeta, che agendo in lui di fianco, lo tira fuori di esso piano, e per ogni azione, che d'istante in istante su di esso rinnova, siccome il Sole, lo obbliga a muoversi di un moto composto del moto che dovrebbe fare nel piano, in cui si trova, e del moto che fuori di esso piano addomanda la nuova azion laterale del pianeta sturbante. Rappresenti *ATB* (*Fig.* 11) nel piano della carta l'orbita della Terra, o sia l'ecclittica, ed *HVK* l'orbita di Venere, la metà della quale *NVn* intendasi sopra il piano della carta sollevata, e la metà *NHKn* sotto lo stesso piano della carta depresso, per concepirla in un piano a quello della ecclittica inclinato, com'è di fatto: i punti *N*, *n*, ne' quali i due piani si tagliano, sono i nodi delle orbite: sia *N* il nodo ascendente, quello cioè per cui Venere dalla plaga australe dell'ecclittica, che concepiremo da *N* in *H* sotto il piano della carta, sale alla plaga boreale da *N* in *V* sopra il piano della carta. Fingasi Venere in *V*, e sia *Vr* l'archetto, che dovrebbe nel seguente tempicello percorrere; ma senta l'attrazion della Terra esistente in *T*. Immaginando il semicerchio *NVn* sopra il piano della carta elevato, concepite ad esso nel punto *V* perpendicolare la piccola retta *Vm* esprimente l'azione della Terra su Venere, per trarla fuori del piano *NVn*: Venere per una forza composta della *Vn*, e della *Vm*, uscendo dal piano *NVn*, si moverà per una via *Vp* tra la particella *Vr* del medesimo piano, e la perpendicolare *Vm*. Così, disegnando *HNnK* il piano, in cui Venere per la retta della forza di projezione dal supremo Motore nell' armonizzamento di tutti i celesti moti impressale sarebbe stata determinata a rivolgersi, dobbiamo raffigurarci che accaduto sia sin dal primo passo del rivolgimento, e che continuato abbia, continui, e sia per continuare ad accadere per sempre. L'effetto di questi continui passaggi di Venere da un piano ad altro si è il tragittar per l'ecclittica in un punto sempre più distante ad occidente da una stella in essa fissa. Noi a dipignerci ciò alla mente fingiamo per la retta di moto perturbato Vp tradotto un piano, il quale va a tagliare l'ecclittica nel punto N' ad occidente del punto N, e ci immaginiamo che l'orbita stessa $NVKH$ siasi mossa, e trasferita nella posizione $N'Vpn'$ nel mentre che Venere ne ha percorso l'archetto Vr; ma realmente non vi ha nel celeste vano, che il solo composto moto di Venere, che grado grado la dispone a tragittar la ecclittica in un punto più occidentale N', N''.... È in oltre da riflettere, che supposti reali i due movimenti dell'orbita da N in N', N''..... e di Venere da V in r, r'...., le direzioni loro non sarebbero contrarie, ma ad angolo, essendo ad angolo il piano dell'ecclittica ATP, ed il piano dell' orbita HVK. Ed in parlar conforme alla verità il moto di Venere da occidente in oriente non è in una direzione costante, ma in particelle di piani continuamente diversi, tutti però in angolo con l'ecclittica; la distanza sempre maggiore ad occidente di una stella, in cui va disponendosi a tragittare, e tragitta Venere per l'ecclittica, è una distanza, che cresce in una direzione determinata, cioè su l'ecclittica stessa. Ciononostante, se per i poli dell'ecclittica, e per i due luoghi di Venere V, p si concepiscan condotti due cerchj, che taglino l'ecclittica nei punti c, g, questi diransi i luoghi di Venere trasportati su l'ecclittica, e cg il moto di lui ridotto al piano dell'ecclitica, ed in quanto da occidente in oriente, moto in longitudine: egli è questo moto in direzione contrario al moto conceputo nell'orbita da N in N', N''.... A restrignere dunque in breve, e conchiudere, i movimenti positivo, e negativo, in astronomía distinti, di Venere, e dell'orbita di lei su l'ecclittica non sono due reali contrarj movimenti in natura, ma un movimento di Venere unico, della sua forza di projezione, dell'attrazion centrale del Sole, e della niente dissimile attrazion lateral della Terra composto, e del quale noi, separando in concetto, ed al medesimo piano dell'ecclittica riducendo, mettiamo in contrarietà la vaga direzione in oriente per serie di piccole rette variamente all'ecclittica inclinate, ed a' punti di essa sempre più occidentali riguardanti, e l'effetto parziale quinci stesso conseguente di un tragitto per l'ecclittica sempre più occidentale. Così in genere si dica del movimento di un pianeta qualunque, e del movimento dell'orbita di lui su quella di un altro, del quale si consideri su di esso l'azione oltra l'azion centrale del Sole; e così del movimento di un satellite, e del movimento dell' orbita sua su quella del suo primario pianeta considerando all'attrazion centrale di questo aggiunta l'attrazione del Sole: del movimento, per esempio, positivo della nostra Luna in oriente, e del movimento negativo della sua orbita per l'orbita della Terra, l'ecclittica, in occidente, considerando con l'attrazion centrale della Terra quella esterna del Sole composta. Due movimenti realmente contrarj sarebbero quelli di un pianeta, e di un cometa, l'uno da occidente in oriente, l'altro da oriente in occidente girante, ma entrambi nel medesimo piano: importerebbero projezioni in direzioni contrarie, ed avrebbero in lor medesimi la ragion della distinzion di positivo, e negativo. Contrapponiamo però come positivi e negativi i moti in oriente de' pianeti, e quelli in occidente di certi cometi, sebbene in diversissimi piani, contemplando in grande contrarie le direzioni nella vasta contrarietà della plaga di oriente, e della plaga d'occidente. Positivo, e negativo di tal sorta son positivo e negativo d'idea vaga, ed i calcoli richieggono di trarne un positivo, e negativo di precisa contrarietà; ma ciò è agevole a fare trasportando i moti ad un medesimo piano, quale quello dell'ecclittica, o sia passando a considerare gli effetti loro su l'ecclitica, che essendo l'uno di progresso, l'altro di retrogradamento in longitudine, presenteranno due intellettuali movimenti precisamente tra loro in relazion di positivo, e negativo. Non fa poi bisogno di molte parole per ciò che spetta alla declinazione positiva, e negativa di un pianeta, intendendo di leggieri ognuno non esser la declinazione positiva, o boreale, e la declinazion negativa, od australe, che due diversi contrarj rispetti, che alternativamente riceve il continuo moto del pianeta, tagliando egli con il giro suo l'equatore in due punti, e scorrendo quinci in borea, quindi in austro. Il simil è, cangiato l'equator nell'ecclittica, della latitudine di un pianeta positiva, e negativa. Le positive, e negative declinazioni, e latitudini nelle stelle fisse sono posizioni di stelle diverse alle contrarie bande, boreale, ed australe dell'equator, o dell'ecclittica; e non altrimenti le positive, e negative latitudini geografiche contrarie posizioni son elleno di luoghi differenti su la superficie terrestre di qua, di là dell' equatore: e tali contrarie posizioni non si presentano alla mente che quali quantità positive, e negative geometriche. Calati dagli astri, e su la nostra terra ritornati ci si offrono nelle teoríe dei fenomeni, che qui accadono, e più immediatamente ci spettano, delle nuove idee di positivo, e negativo da rischiarare. Si nomina da' frankliniani elettricità positiva, ed elettricità negativa, ma s'ingannerebbe a partito chi credesse intendersi da loro sotto questa distinzione due fisici esseri di contraria natura. Uno è, gridan anzi, l'elettrico elemento, l'elettrico attuosissimo agente: l'eccesso di esso è la elettricità positiva; il difetto la elettricità negativa. Ma, ed in qual senso prender si deve questo difetto sinonimo di negazione? In senso assoluto, di privazione di ogni elettrico elemento, di un preciso nulla di esso? Ma in un nulla come poi distinguer gradi? Ecco pertanto le rette idee, giusta le quali solamente può sussistere il frankliniano sistema. L'elettrico elemento è un fluido in tutti i corpi sparso; i corpi hanno rapporto a lui diversa capacità secondo la diversa loro composizione, la figura delle particelle, il numero, la grandezza degli interstizj; le diverse capacità cercano perennemente di essere ugualmente soddisfatte con una distribuzione del fluido a loro proporzionata; dove per combinazion di altre cause naturali, o per arte si accumula il fluido sopra la proporzional esigenza della capacità, ivi è elettricità per eccesso; dove si diminuisce sotto la proporzional esigenza della capacità, ivi è elettricità negativa. Eccesso dunque, e difetto sono entrambi due termini relativi alla quantità di elettrico fluido richiesta per la proporzione delle capacità, i vocaboli di positivo, e di negativo in materia di elettricità sono due contrarj allontanamenti della proporzionata distribuzione del fluido elettrico, dall'equilibrio di esso, in cui cessano gli elettrici segni. Il frankliniano sistema così inteso diventa un sistema chimico confacente all'odierno gusto, e somigliantissimo al sistema lavoisierano sul calorico. Guidato da questo luminoso sistema passo a svolgere il vero senso dei gradi positivi e negativi, e sopra e sotto lo zero nel termometro. Lo zero (parlando della scala di Reaumur, o piuttosto del de Luc) è quel volume, a cui nel termometro nel ghiaccio fondentesi immerso si riduce il mercurio per quella quantità di calorico, che dopo la comunicata al ghiaccio in lui resta, e che secondo la proporzion delle rispettive capacità si equilibra con la quantità necessaria nel ghiaccio per la sua fusione. Li gradi del termometro positivi sono volumi maggiori, ai quali il mercurio si dilata per quantità di calorico maggiori. Ed i gradi del termometro negativi sono volumi minori, ai quali il mercurio ristrignesi per quantità di calorico minori. Il mercurio non perde la sua fluidità che ai gradi 32 sotto lo zero, ed è ben lontano anche allora dall'aver perduto tutto il calorico: altro non si può dir che ne abbia perduto, che quel tanto, che secondo la capacità di lui costituisce la differenza dello stato fluido, e dello stato concreto. Quanto dunque non è lungi lo zero del termometro dall'esser segno di un vero nulla di calorico! Denota egli per l'opposto nel mercurio una quantità di calorico considerabile sopra quella, che gli rimarrebbe nel consolidarsi: e denota nell'acqua quella quantità, che la trasporta dallo stato solido allo stato fluido; denota tra una quantità, e l'altra, non una uguaglianza aritmetica, ma una uguaglianza proporzionata, un equilibrio di capacità e quantità con capacità e quantità; e similmente qualunque grado, o positivo, o negativo del termometro non denota nel corpo, con cui è in contatto, una quantità di calorico uguale a quella, che è nel mercurio, ma una quantità proporzionata a norma delle diverse capacità di modo, che ne resulta tra calorico e calorico equilibrio, ed il termometro non ha ragione di moto. Ogni grado essendo della natura dello zero, o del pari segno di un equilibrio di calorico, può essere preso per zero; si è più comunemente prescelto a zero il segno dell' equilibrio del calorico nel mercurio, e nel ghiaccio fondentesi, per esser questo un effetto familiarissimo, all'arte, se la natura non lo presenti, facilissimo, solenne, lento, in suo tenore semplice, e costante. Siccome indeterminatamente lo zero di moto nel termometro a qualunque de' suoi gradi è segno di equilibrio di calorico; così indeterminatamente lo zero di fenomeni elettrici, di viva elettricità, di azion, di moto del fluido elettrico, è segno di equilibrio di esso. Manca riguardo all'elettrico fluido un particolare equilibrio scelto a zero, a principio di una scala di altri equilibrj distinti per i gradi della medesima; manca un eletrometro al termometro analogo. A costruirlo farebbe mestieri, che l'elettrico elemento producesse nei corpi un cangiamento, le cui differenze cadessero sott'occhio del pari che le differenti dilatazioni dal calorico cagionate in ogni corpo solido e fluido, ma più regolarmente nel mercurio; sarebbe uopo, che un grado di tal cangiamento in un dato corpo, o solido o fluido, fosse relativo ad un particolar equilibrio accompagnato, e connotato da effetto ben cospicuo, frequente, in ogni tempo e luogo uguale a sè stesso, non fuggitivo. Intanto ciò che fa all'oggetto mio presente si è, convenire lo zero del termometro, e lo zero di elettricità in ciò: che segnano non un nulla di calorico, o di elettrico fluido, non già; ma un equilibrio di quello, o di questo. Perciò tali zeri si rassomigliano a quello zero di movimenti opposti, a quella quiete, che nasce dal conflitto di due forze contrarie, ed uguali, e che si tengono scambievolmente l'una l'altra in equilibrio; come, ad esempio, sarebbe combattendosi due uguali forze, attrattiva, e repulsiva, per l'equilibrio dei conati delle quali niun moto si genererebbe nè di attrazione, nè di repulsione. Se parlisi della quiete proveniente dalla mancanza di qualunque forza motrice, essa in riguardo alla causa differisce dalla quiete per equilibrio, ma in essere assoluto considerata è una cosa stessa: l'una e l'altra quiete sono un nulla rispetto alle idee di effettivo moto positivo e negativo, ma sono in lor medesime un reale modo di esistere. Del resto la natura tutta, o sia la materia tutta in natura esistente è animata da forze motrici dal Creatore sapientemente impresse; tutte le moli distribuite nell'immenso vano rotano intorno a lor medesime, e rivolgonsi in un orbita, se pur alcune non scorrono per curve erranti, o di rami infiniti. Non vi ha dunque in parte alcuna della materia quiete assoluta, ma solamente vi hanno delle quieti rispettive: han quiete rispettiva i corpi su la superficie di ciascuna gran mole, come i corpi terrestri su la superficie della terra, per l'equilibrio della forza centripeta, e della forza centrifuga; hanno quiete rispettiva le particelle di un qualunque corpo per l'equilibrio tra gli sforzi delle attraentisi, e gli sforzi del fluido repellentesi loro intramischiato. Ciò posto, le quieti, unicamente rispettive, esistenti in natura, o gli zeri di rispettivo movimento positivo e negativo; lo zero del termometro, che è la quiete, o lo zero di movimento del mercurio in un punto a piacere prescelto, e fissato a principio della scala; lo zero di elettricità, che è la quiete, o lo zero di movimento nel fluido elettrico estimato per la quiete, o zero di movimento negli elettrometri usitati, si uniscono, rapporto alla causa, nella generale idea di equilibrio. Se ci fosse dato di conoscere e misurare le assolute quantità del calorico, la scala di queste partirebbe dal nulla di calorico, e non farebbe che ascendere, essendo impossibile discendere sotto il nulla di quantità di una materia; vale il medesimo per l'elettrico fluido; e generalmente comprendesi, che il positivo e negativo non possono cader su la quantità di una materia, se non che impropriamente, cioè per uno zero artificiale apposto ad una certa quantità a valutar poi per eccessi e per difetti in confronto di essa le altre. Unirò a comodo del leggitore le fila dispiegate, arricchendo ad un tempo la tela di alcune altre, che non addomandavano particolar dispiegamento. Sono pertanto le quantità positive e negative della fisica: 1.° Forze di contraria natura: l'attraente, e la repellente. 2.° Contrarie projezioni, movimenti in direzioni contrarie. 3.° Applicazioni di una forza in parti contrarie dal centro di gravità, o di figura di un corpo, sebben nella medesima direzione. 4.° Due moti contrariamente, per acceleramento l'uno, per ritardamento l'altro, secondo la stessa legge varianti: come il moto uniformemente ritardato nella caduta e nella salita dei gravi; o alterne variazioni di acceleramento, e ritardamento giusta una legge in un continuo moto curvilineo, qual l'elittico de' pianeti. 5.° Sforzi contrarj per risoluzione: tali la forza centripeta, e la forza centrifuga, non essendo questa che un risultato di conceputa matematica risoluzione della forza tangenziale. 6.° Effetti contrarj di riduzione: moti in longitudine contrarj dei pianeti in comune, e di certi cometi; di un pianeta, e dell' orbita sua su quella di un altro sturbantelo. 7.° Successivi rispetti contrarj di un movimento: alterna declinazione, o latitudine boreale, ed australe di un pianeta. 8.° Rapporti contrarj aritmetici, o differenze contrarie per maggioranza e minoranza, per eccesso e difetto da una quantità fisica arbitrariamente scelta e stabilita a zero di scala di quantità simili: di tal sorta i gradi positivi e negativi del termometro. Li gradi di elettricità positiva, e negativa non hanno uno zero universale e determinato di paragone; ma singolare, e vario, che è lo stato, in cui il corpo detto positivamente, o negativamente elettrizzato trovar si dovrebbe, per essere in quantità di fluido elettrico a capacità proporzionale in equilibrio con i corpi intorno. Non si può concepire positivo, e negativo senza zero; ma basta, che questo sia possibile. Lo zero di forza attraente, e repulsiva, lo zero di projezione, lo zero di movimento assoluto non si avverano nella materia, tutta in moto assoluto, tutta da attrazione e repulsion agitata per voler del supremo Motore, onde ne resultasse non un ammasso inerte, ma un bel sistema di moti, un universo vivo; sono però possibili, non inchiudendo la materia in sua essenza forze motrici, e moto. Quello, che si dà in natura è lo zero di movimenti respettivi per equilibrio di forze, ed è un rispetto di tali distanze, medio tra i movimenti respettivi contrarj, cioè i rispetti di accesso, e di ricesso. Lo zero tra i due rispetti contrarj di declinazione a borea, ed austro in un pianeta, essendo l'istantaneo trovarsi nell'equatore, è un rispetto medio tra loro. Si posson dunque distinguere zeri possibili, zeri di fatto, zeri proprj, zeri improprj. I valori delle quantità positive, e negative fisiche si possono in genere rappresentar astrattamente per numeri positivi e negativi, e costituire in una aritmetica progressione ascendente con un ramo, e discendente con l'altro da o, non altrimenti che i valori delle aritmetiche, de' crediti, e debiti, e delle geometriche.

Un analista di chiaro grido, e del drappello di quelli, che non contenti dell'esercizio del calcolo amano di levarsi alla metafisica di esso, il signor Leonardo Salimbeni in una Memoria inserita nel tomo VII della Società Italiana intorno alla moltiplicazione, ed alla divisione algebraiche, venendo a trattar delle quantità positive e negative, non parendogli esatto quanto di esse vien dalla maggior parte degli autori, per non dire da tutti, proferito, espone la nuova sua dottrina così: *Secondo il mio giudicio grandezze positive sono grandezze da aggiugnersi; e grandezze negative sono grandezze da togliersi. Adunque tra le grandezze positive, e le negative non havvi altra differenza che nell' uso, che se ne vuol fare: le une sono destinate alla somma, e le altre alla sottrazione; ma la loro natura è sempre la stessa. Ne viene ancora, che una grandezza positiva può essere uguale ad una negativa; poichè per esempio il 7 sarà uguale a sè stesso, sia che nella somma, o nella sottrazione sia impiegato; ma egli però non sarà uguale nell'uso, che se ne vuol fare, il quale è differente. Per strana, che appaja questa conseguenza pronunziata così astrattamente, io però farò vedere con una applicazione siccome convengo in questo con tutti gli analisti. Infatti sia* (Fig. 12) *la* A C *una linea retta, ed il punto* B *sia l'origine, come si suol dire, delle grandezze. Prendansi ora dall'una parte e dall' altra del punto* B *le rette* B A, B C *uguali fra loro; ma la* B A *sia dalla parte delle positive, e la* B C *dalla parte delle negative. Se chiamo la grandezza positiva* B A *uguale a* $+$ a, *ognuno conviene, che la grandezza negativa* B C *sia uguale a* $-$ a. *Ma la retta* B A *è uguale alla retta* B C; *laonde è forza, che anche la grandezza positiva* $+$ a *sia uguale alla grandezza negativa* $-$ a, *uguale però in grandezza, ma differente nell'uso. Quindi debbesi far differenza tra uguaglianza ed equazione, che gli analisti prendono per una* *stessa cosa; imperocchè io dico, che due grandezze sono in equazione quando non solo sieno uguali in grandezza, ma debbansi anche allo stesso modo usare. Dalla qual definizione apparisce manifestamente, che una grandezza positiva può bensì esser uguale, ma non in equazione, con una negativa; e però* + a *è uguale a* — a, *ma* + a *non sarà in equazione con* — a. *Da tutto ciò si ricava, che dovrebbesi esprimere con due segni differenti, uguaglianza ed equazione, in vece d'indicarli, come si fa, col segno comune* =; *pure, siccome della prima si fa poco uso nell'algebra, e molto della seconda, e l'equazione rinchiudendo anche l'uguaglianza, così non può cagionar errore il servirsi dello stesso segno, quando ciò venga fatto colle dovute cautele. Le idee semplici, che io ho affisso alle grandezze positive, e negative, sono ben differenti da quelle, che sono state adottate dagli autori di Elementi, i quali con un'analogia (cosa veramente nuova nelle matematiche) hanno voluto spiegar la loro natura, e quindi ne hanno tratto delle strane conseguenze. L'analogia è questa: le grandezze positive sono come crediti, che un uomo abbia dall'altro, e le grandezze negative come debiti. L'analogia può fin qui correre, perchè li crediti di un uomo sono realmente cose da aggiugnere a' suoi capitali, e i debiti cose da togliersi da essi. E siccome, soggiungon essi, si può dire di un uomo, che niente posseda, ed abbia un debito, ch'egli ha meno del niente, perocchè per aver niente bisogna che paghi prima il suo debito; così le grandezze negative sono minori del niente. Ma come mai quello che non è, quello che è la mancanza di un essere, che prima esisteva, il nulla finalmente, come può mai essere maggiore della grandezza negativa, cioè di un ente, che esiste? Non è egli questo un distruggere la vera nozione di maggioranza? Perchè una gran-*

dezza è negativa, perchè essa è destinata alla sottrazione, per questo dovrà esser minore del niente? Basta mettere in forma di sillogismo l'argomentazione di questi autori per accorgersi della sua falsità. Chi ha un debito, e niente possiede, ha meno del niente: la grandezza negativa è come un debito: dunque la grandezza negativa è meno del niente; il qual sillogismo, avendo manifestamente più di tre termini, pecca nella forma. Dalla strana proposizione, che le grandezze negative sieno minori del nulla, n'è anche derivata la ugualmente strana conseguenza, che esse grandezze sieno eterogenee, come inferisce il Wolfio nel num. 23 *dell'Analisi.* Il Wolfio non ebbe certo idee nette e giuste su le quantità positive, e negative. La sua definizion terza nell'Algebra num. 16 si è: *Quantitas signo* + *affecta dicitur positiva, item affirmativa, atque nihilo major, quae vero signo* — *afficitur privativa, item negativa, atque nihilo minor, a nonnullis absurda.* Bisognava in definire procedere a rovescio: accennare, almeno con qualche esempio, che nel calcolo occorre di maneggiare delle quantità contrarie: dire, che tal contrarietà si esprime in linguaggio con i vocaboli positivo o affirmativo, e privativo o negativo; ed in algebraica segnatura si segna con + e —. La maggioranza sopra, e la minoranza sotto il nulla non era cosa da inchiudere nella definizione. Nel riferir l'opinione di alcuni riguardanti la quantità negativa qual assurda, senza muover riflesso e parola in contrario, mostra, che Wolfio non vedea la falsità dell'idea, e non era lontan dal consenso, anzi non anderà guari che il mireremo in esso caduto. Dall'esposta definizione tira per primo corollario: *Quoniam* + *est signum additionis,* — *vero signum subtractionis: quantitas positiva prodit, si vera aliqua nihilo addatur,* e.g. $0+3=+3$,

$o + a = + a$, *privativa relinquitur, si quantitas aliqua vera ex nihilo subtrahatur* e. g. $o - 3 = - 3$, $o - a = - a$. Scorgesi, che il concetto tutto della quantità positiva nel Wolfio è stato quello di una quantità da aggiugnersi, ed il concetto tutto della quantità negativa quello di una quantità da togliersi. Proseguendo pertanto a sviluppare il suo intendimento, dal primo corollario deduce a secondo: *Sunt igitur quantitates privativae verarum, per quas intelliguntur defectus; consequenter non quantitates verae*. Eccolo già dietro a coloro, da' quali le negative quantità denominate eran quantità assurde, perchè, in luogo di maggiori, minori contrariamente di zero. Riguardando il Wolfio le quantità negative come quantità non vere, non è maraviglia, che le stimasse alle quantità vere, alle positive eterogenee: n'era anzi questa una necessaria conseguenza. Ma la prova, che nel corollario quinto adduce della eterogeneità tra le positive quantità e le negative è tratta dalla definizione XV num. 32 dell'aritmetica: *Quantitates* (definisce egli) *homogenea sunt, quarum una aliquoties sumta alteram superare potest, seu quarum una ab altera vel semel, vel aliquoties ablata tandem, vel nihil, vel se minus relinquit. Heterogeneae vero sunt, quarum una aliquoties sumta alteram superare nequit*. Da questa seconda parte della definizione argomenta egli così: *Quia defectus positivae quantitatis aliquoties sumtus positivam superare nequit, cum potius multo magis ab ea deficiat, quantitates privativae positivis heterogeneae sunt*. Vuol dire, che $-a$ moltiplicato per un numero qualunque N non può mai superare una quantità positiva, sia pur il numero N di una grandezza immensa, infinita; che anzi quanto sarà N più grande, tanto più il prodotto $-aN$ si abbasserà sotto la quantità positiva, e mancherà da essa, e che perciò $-a$ quantità negativa manifestasi alla quantità positiva eterogenea. Io non so vedere perchè il Wolfio assegnando due criterj della omogeneità, uno per moltiplica, l'altro per sottrazione, si restringa ad uno rapporto alla eterogeneità, al solo cioè per moltiplica, dovea aggiugnere: *Seu heterogeneae sunt quantitates quarum una ab altera, vel semel, vel aliquoties ablata nunquam, vel nihil, vel se minus relinquit.* Or sia b una quantità positiva, e $-a$ una quantità negativa, e la positiva b si sottragga dalla negativa $-a$: resulterà $-b-a$ minore per il dire del Wolfio stesso di zero, e conseguentemente molto minore della positiva quantità b: dunque tanto è lungi, che una quantità positiva da una negativa sottratta non lasci mai, per quanto si replichi la sottrazione, un residuo di sè minore, che per l'opposto necessariamente alla prima sottrazione lo lascia; onde per le definizioni stesse del Wolfio la quantità positiva, e la quantità negativa, anzi che mentire di esser eterogenee, e richieder molte operazioni per conoscere il vero loro rapporto, appalesansi tosto per omogenee. Se sommisi in oltre 9 per esempio con -3, proviene 6, cioè arrecasi al 9 il diminuimento di 3; e se all'incontro da 9 si sottragga -3, ottiensi 12, cioè il 9 riceve l'aumento di 3. Queste operazioni di somma, e di sottrazione tra quantità positiva, e quantità negativa, e questo diminuimento, od accrescimento di una per l'altra, che dal Wolfio con tutti universalmente gli analisti s'insegnano, non si possono intendere, che supposte esse due quantità omogenee giusta la legge degli omogenei: non si può concepir somma o sottrazione tra linea e superficie, tra merce e denaro ec., nè diminuimento o accrescimento di una di tali cose per l'altra a cagione della eterogeneità loro. Non potè schivar di vedere questo obbietto il Wolfio. Ma come il ribattette da sè? Ecco: *Mirum* (dice al num. 31), *mirum videri poterat, quod cum quantitates privativae positivis heterogeneae sint, heterogeneae autem nec addi, nec a se invicem subtrahi possint, privativae tamen positivis addantur, et ab iis subtrahantur. Enimvero rem accuratius perpendens animadvertes proprie loquendo privativam nunquam addi positivae, nec ab eadem subtrahi: sed in additione subtrahi, quod plus justo fuerat additum; in subtractione addi quod plus justo fuerat subductum.* Ma anche per questo verso, e in quanto appunto la addizione del negativo equivale alla sottrazione del positivo, e reciprocamente, e può il positivo per il negativo essere diminuito, o ribassato ad una certa grandezza, ed accresciuto, o ad una certa grandezza restituito, manifestasi il negativo al positivo omogeneo. Va innanzi il Wolfio, e dalla pretesa eterogeneità deduce non passar tra quantità positiva, e quantità negativa ragione geometrica: *Cum quantitates privativae positivis heterogeneae, privativis homogeneae sint; inter privativam, et positivam ratio intercedere nequit; inter privativas vero ratio datur:* e. g. $-3a : -5a :: 3 : a$. Ed illustra il corollario con il seguente scolio: *Non mirum videri debet inter quantitates privativas* $-3a$, *et* $-5a$ *eandem esse rationem, quae est inter positivas* $+3a$, *et* $+5a$. *Quod enim quantitates quatuor quarum binae binis heterogeneae sunt, proportionales esse possint, tum ex rationum doctrina intelligitur, tum ex Geometria manifestum est, in qua eandem rationem inter lineas esse demonstravimus, quae inter superficies datur:* e. g. *parallelogramma aequalium basium rationem altitudinum habent; et in praxi regulae trium pretia sumuntur ut mercium quantitates, licet pretia mercibus* *heterogenea sint. Falluntur autem qui inter* $+ 1$, *et* $- 1$, *atque inter* $- 1$, *et* $+ 1$ *rationem eandem esse sibi persuadent*. Si può, e accade non di rado di apportare di cose vere ragioni non vere, e così è succeduto qui al Wolfio; ma sino ad ora non si è per me premesso tutto ciò, che fa di mestieri per dimostrarlo; onde mi riserbo a luogo acconcio l'esame. Intanto è certo cader su le quantità positiva, e negativa la ragione aritmetica o di differenza, che non cade su le superficie, e le linee, nè su le merci, ed i prezzi, od altre quantità veracemente eterogenee. Sin qui però fisa la mente al soggetto contemplato dal Wolfio non ho parlato che delle astratte e generali rappresentazioni delle quantità positive e negative, o per numeri determinati, o per indeterminati sotto letterali specie. Ma io distinguo da tali comuni rappresentazioni astratte le quantità, che denominiamo positive, e negative, considerate in lor medesime. Ed in tale considerazione ci si danno a vedere delle differenze. Le quantità positive e negative della geometría sono certamente anche in loro stesse omogenee: un seno, un coseno negativo, una tangente, un'ascissa, un ordinata negativa non è niente meno una retta, che un seno, un coseno positivo, una tangente, un'ascissa, un'ordinata positiva; la contrarietà loro non è che una contrarietà di posizione rispetto ad una retta, di direzione da un punto. Il quadro sopra delineato delle quantità positive, e negative fisiche dimostra in esse diversi modi e gradi di contrarietà: il menomo è quello della contrarietà artificiale, ed arbitraria dei gradi positivi, e negativi del termometro; il massimo quello della contrarietà di natura tra la forza attrattiva, e la forza repulsiva. Il so, che il Boscowich a sostenere, che azion attrattiva, ed azion repulsiva non importano due forze di natura contraria, e che il variar da una in altra si concilia benissimo con la semplicità di una forza, si vale dell'esempio di una curva, alla cui semplice, ed uniforme natura non osta l'avere ordinate, or positive, or negative, e lo scorrere con tratti a vicenda positivi, e negativi. Ma la contrarietà essenziale tra azione attrattiva ed azion repulsiva si fa sì chiaro sentire, e trae sì dirittamente a due forze di natura contrarie, che bisogna sospettar di illusion nell'esempio. E vi ha di fatto. La natura di una curva consiste in una legge tra le grandezze delle ascisse, e delle ordinate, o piuttosto non è la curva, che essa legge. Può la legge esser tale, che, acquistando l'ascissa certa grandezza, l'ordinata si annienti, e la curva tagli l'asse; e crescendo l'ascissa per un certo tratto rinasca l'ordinata, e cresca, ma in parte contraria, cioè sotto l'asse delle ascisse, se prima era sopra; indi venendo l'ascissa ad altra certa grandezza questa ordinata cresciuta, e poi diminuita giunga anch'essa ad annullarsi, e la curva ritaglj l'asse, e ritorni nella region superiore; e così alternativamente senza fine: e i tratti tutti della curva, sì quelli nella region disotto, che quelli nella regione di sopra l'asse, e in altri termini sì i negativi, che i positivi rami, siccome per la stessa legge determinati, saranno della stessa stessissima natura, e la intera curva semplice ed una. Ma che prova mai ciò, fuor che ammettere l'astratta continuità della geometrica estensione un tal flessuoso andamento, od alterno passaggio da positivo a negativo, e da negativo a positivo? E si può quindi argomentare ad un esser fisico, ad una forza, ed infingersi, che anch'essa similmente, senza lasciar d'essere una, e semplice, alterni di attrattiva in repulsiva, e di repulsiva in attrattiva, ed in punti di mezzo si annulli, od intralasci d'esser forza, non essendo nè attrattiva nè repulsiva? Nel concetto di una forza la natura ci vien determinata dalla spezie di agire: ammette nell'azione varietà di grado, ma non di spezie: e chi può dal suo intelletto ottenere di non rappresentarsi l'azione attrattiva, e l'azione repulsiva quali due azioni di spezie diverse e contrarie? Non vale dunque il paragone tra la curva e la forza, perchè nella natura della curva sono ugualmente inchiuse le ordinate positive e negative, per esser della medesima spezie, siccome tutte linee rette, e per poter cader del pari su le une, che su le altre la legge delle grandezze relative alle ascisse. E basti delle contrarietà delle quantità positive, e negative fisiche. Dirò due parole su la contrarietà del credito, e debito, che sono quantità positive, e negative morali. Il credito, ed il debito sono due contrarj stati di relazion commerciale: il credito è un'azione, che hai su di un altro; il debito un' azione contraria, che un altro ha su di te, ed in te considerata prende il nome di passione: in distinguer legale azione, e passione, sono relazioni di moral natura contraria. Le contrarietà tutte delle diverse classi, o spezie di quantità positive, e negative si compenetrano astrattamente prese nella rappresentazion universale dei varj loro valori per numeri positivi, e negativi. Formata di queste rappresentazioni numeriche la progressione aritmetica (A)

$$+\infty \ldots +4, +3, +2, +1, 0, -1, -2, -3, -4, \ldots -\infty$$

chiarissima si rende dalla natura stessa della progressione la omogeneità di tutte, delle positive ancora con le negative; poichè siccome si discende per le positive sino a zero, così si prosegue a discendere dallo zero per i numeri negativi, sempre e continuamente per la detrazione di una unità, il che non si potrebbe fare, se non regnasse nella progressione una perpetua, esatta omogeneità. Irrefragabilmente perciò contro del Wolfio tornasi a confermare avervi tra i positivi, ed i negativi numeri una vera omogeneità, rendendosi insieme evidente, che tutte ad una stessa semplice omogeneità si riducono le quantità positive, e negative di qualunque classe, e spezie nella espressione de' valori loro per numeri positivi, e negativi. E che è poi in sostanza l'esprimer per i primi i valori di una quantità positiva, e per i secondi i valori di una negativa quantità, fuorchè addurli a rapporto aritmetico, ad estimazion per numerico intervallo, come nell'ordine della progressione (A) apparisce? Dunque le quantità positive, e negative di qualunque classe, e spezie acquistan tutte una stessa omogeneità nell'esser recate a valutazione per rapporto aritmetico. Con le medesime idee, con la distinzione all'intelletto presente delle quantità positive, e negative considerate in lor medesime, e considerate nella estimazion per aritmetico rapporto, io mi fo ad esaminare la proposizione, che la quantità negativa è minore del nulla. Una retta alla banda negativa non è sicuramente minore del nulla di linea, del geometrico punto; la forza repulsiva non è per certo meno del nulla di forza; nè una projezione, un movimento in direzion negativa meno del nulla di projezione, e di movimento. Non si può escogitar assurdità maggiore che l'affermare un essere meno del nulla. Ed oltre assurdità sì mostruosa implicherebbesi nella proposizione una contraddizione attesa la libertà d'invertere il positivo e negativo. Presa a positiva la forza attraente, e conseguentemente toccata alla forza repellente l'appellazion di negativa caderebbe su di lei la mala sorte di esser meno del nulla, ed all' opposto questa sciagura anderebbe a rovesciarsi su l'attraente forza, scelta la repellente a positiva. Quali metamorfosi più ridicole di queste? Dèesi ancora osservare, che il nulla separante le due quantità positiva, e negativa è tanto nulla dell'una, quanto dell'altra: con che spicco maggiore riceve la falsità, l'assurdità della proposizione, che la quantità denominata negativa sia in suo essere considerata meno del nulla delle due quantità, comprendendo questa proposizione quest'altra: che la quantità stessa appellata negativa sia in esser meno del nulla di sè: per esempio la forza repulsiva meno del nulla di forza repulsiva. Dicesi denaro negativo il denaro di debito al contrario del denaro di credito intitolato positivo: il denaro negativo per te è positivo per il tuo creditore: denaro meno del nulla di denaro non è ella un'assurdità, che salta agli occhi? Chi può più udirne e soffrir all'intelletto nuovi urti ed oltraggi? Sebbene si dirà su la assurdità ultima, non essere no il denaro, che si deve, che è meno del nulla; ma sì il dovere. Importa però il dovere un concetto, il concetto di una relazion commerciale, di una relazione che è passione in te, ma azione nel tuo creditore, inversamente del credito, che è una relazione di azione in te, di passione nel creditor tuo; il nulla non importa concetto, anzi importa il rimovimento di ambedue i concetti: dunque metafisicamente è falso, ed assurdo essere il dovere meno del nulla. Questa falsità ed assurdità si fa allo spirito meno sentire che le superiori; ma guardisi, che alla sottigliezza di lei un'altra ragion non si aggiunga, vale dire il confondere insieme queste due proposizioni: il dovere è meno del nulla; il dovere è peggio dell'aver nulla: la prima non inchiude che un confronto, la seconda ne inchiude due: mi spiegherò più chiaro in appresso. Non vi ha che un caso, nel quale si verifichi essere la quantità notata per negativa minore in realità del nulla, nel caso cioè del nulla improprio, ed artificiale, come nella scala del termometro. O si consideri il grado negativo del termometro in ciò che immediatamente è, vale dir un volume del mercurio minore del volume di esso segnato zero, od in ciò che denota, cioè una quantità di calorico minore di quella allo zero corrispondente: evidentissima cosa è essere il grado negativo termometrico in realità minore del nulla, a cui si riferisce: e per la improprietà di questo nulla vi è di maraviglioso. È dunque necessariamente vera la proposizione, che la quantità negativa sia in essere meno del nulla, qualora trattisi di nulla improprio; ed è sommamente assurda, ogniqualvolta lo zero separante la quantità negativa, e la positiva sia un nulla proprio. L'essere però in questo caso di zero proprio estremamente assurdo, che la quantità negativa sia di esso minore in semplice confronto con lui, ed in considerazione di realità, o di essere, non impedisce, che la quantità stessa negativa sia meno dello stesso zero in altro senso, in senso di aritmetico rapporto, instituendo cioè un doppio confronto: della quantità voglio dire negativa, e dello zero alla quantità positiva, e considerando, dove passi maggior differenza, maggior intervallo, ed in ragion della maggior differenza minore estimando il rapporto. Corre tosto per abito a ciò fare la mente dall'amore del possesso portata, quando si tratta di debito: paragona l'aver debito, ed il nulla avere con l'aver credito, o con il possedere, e ravvisando nell'aver debito maggior distanza, o differenza dall'aver credito, o possedere, che nell'aver nulla, giudica essere il debito meno che l'aver nulla; ciò che anche esprime dicendo, esser il debito peggio che l'aver nulla. Ecco la ragione, per cui la proposizione della quantità minore del nulla non incontra riguardo al debito quella difficoltà, che riguardo alle altre quantità negative; anzi presentasi con tanto aspetto di verità in quello, con quanto di assurdità in queste: la ragion è, che nel debito spigniamo subito, e senza avvedercene, l'intelletto a due confronti, alla considerazione del rapporto aritmetico; nelle altre quantità negative si arresta al confronto semplice con il nulla respettivo, ed alla considerazione dell'essere. Ma facciamo riguardo a qualunque quantità negativa tutto ciò che spontaneamente si fa rispetto al debito, e diverrà vero relativamente a qualunque si sia negativa quantità, nel senso che lo è per il debito, l'essere meno del nulla. Tra i termini di una ascissa negativa, e di una positiva vi è maggior distanza che dal punto intermedio di comune origine al termine dell'ascissa positiva: dunque l'ascissa negativa è in aritmetico rapporto meno che il nulla di ascissa. Havvi da un grado, o qualunque numero di gradi di forza repulsiva ad un grado di forza attrattiva maggior differenza, che dal nulla di forza: dunque la forza repulsiva è in aritmetico rapporto meno del nulla di forza; e così continuisi il discorso. La cosa vien generalmente dimostrata nella progressione (*A*), universal rappresentazione delle quantità positive, e negative numericamente valutate, e ridotte ad aritmetici rapporti. La stessa progressione dimostra, che quanto una quantità negativa cresce in grandezza assoluta, e addomanda a sua espressione un numero maggiore, tanto diminuisce in aritmetico rapporto. Laonde comprendesi qual riflesso porre si debba per distinguere in una quantità negativa l'assoluta sua grandezza, e l'aritmetico suo rapporto, a scansare gli equivoci, e gli errori. Io per esempio ho detto, parlando delle due comunicazioni tra la tangente positiva e la tangente negativa, che comunican tra loro per l'infinito nelle estreme grandezze, e per lo zero nei menomi elementi: vedesi, che nella negativa tangente ho considerato la grandezza assoluta, non altrimenti che nella positiva. Se avessi considerato la grandezza di aritmetico rapporto, che più brevemente, ed in un termine solo si può chiamar *valore*, avrei dovuto dire, che l'infinito è il passaggio dalla tangente positiva nella sua estrema grandezza alla tangente negativa nel suo menomo aritmetico rapporto, o valore; e che lo zero è il passaggio dalla tangente negativa nel massimo suo aritmetico rapporto alla tangente positiva nel menomo elemento di sua grandezza. Distinguo io per fine, contrarietà delle quantità positive e negative, espressione di essa contrarietà, effetto dell' espressione nel calcolo. Avanti ogni nostro riflesso, ogni nostra espressione, ogni uso nel calcolo, il seno di un arco minore di gradi 180 è contrariamente posto al seno di un arco di gradi 180 maggiore, ed il coseno di un angolo acuto contrariamente dal centro diretto del coseno di un angolo ottuso, e similmente la tangente di quello contrariamente stesa alla tangente di questo. La contraria tendenza delle ascisse da un punto, la contraria posizione delle ordinate rispetto all'asse di quelle sono contrarietà esistenti nelle curve per la natura loro prima del nostro concetto. La contrarietà fisica della forza attrattiva, e della forza repulsiva precede ogni nostra considerazione; e tutte insomma le quantità da uno zero proprio separate hanno una contrarietà dal nostro intelletto indipendente, ed a qualunque uso anteriore. Noi esprimiamo tale contrarietà con i vocaboli di positivo, e negativo, e la notiamo con i segni $+$ e $-$. Se alla quantità astratta B aggiugniamo $+a$, $-a$, nel trasportar queste dallo stato semplice, od incomplesso allo stato complesso $B+a$, $B-a$, la prima $+a$ divien veracemente quantità aggiunta, la seconda contro il proposito divien quantità sottratta: è questo l'effetto della contrarietà loro per i segni $+$, $-$ espressa. Differiscon dunque le quantità positiva, e negativa nell'effetto dell'uso; ma non è questa la sola differenza loro, non è la primaria: differiscon primamente, e avanti ogni uso perchè contrarie; la differenza nell'effetto dell'uso è una differenza secondaria conseguente dalla prima. Lo stato immediato, e proprio delle quantità positiva, e negativa è lo stato semplice $+a$, $-a$, lo stato complesso è uno stato da noi loro dato. L'idea, la definizione intrinseca loro è quella di quantità contrarie; il concepirle, l'una quantità aggiunta, l'altra quantità sottratta, è supporle tolte dal semplice loro stato, e recate a stato complesso: il considerarle, l'una qual quantità da aggiugnere, l'altra qual quantità da sottrarre è un declinar dall'intrinseco loro concetto, dall'immediato semplice loro stato, con riferirle allo stato complesso, e pronunciarne l'effetto. Frate Luca a ragione distinse il *puro meno* o sia semplice, e solitario, libero, in contrapposto del chiuso in quantità complessa. Significa il puro meno in $-a$ unicamente contrarietà: significa il $-$ abbracciato nella quantità complessa $B-a$, e perciò detto complesso, sottrazione. Sussiste nel senso di aritmetico rapporto, quale comunemente, e di riflesso quasi spontaneo si contempla nel debito, la proposizion di Fra Luca, che il puro meno è manco del nulla.

§. VII. Poichè il — si può in due stati considerare, in stato semplice, ed in stato complesso; hanno cercato gli analisti di dimostrare per ambedue gli stati di —, che — moltiplicato per — produce +, o sia $- \times - = +$. Ho nel §. II recato la geometrica dimostrazione dello scoliasta di Diofanto rispetto allo stato del — complesso, e notata la piccola differenza tra essa, e quella di Frate Luca a pag. 130 del suo volume, che è in ogni parte la stessa da posteriori analisti, dal Wolfio tra gli altri, adoperata. E sul principio dell'antecedente §. V ho riferita l'altra dimostrazion di Fra Luca in letterali specie, e veramente astratta, algebraica; concludente però per via di esclusione: del che vi ha ragion di far maraviglia; poichè poteva egli a letterale espressione tradurre la sua dimostrazion geometrica, ed ottenuta ne avrebbe e presentata una dimostrazion algebraica diretta, convincente non solo, ma persuasiva. Ciò che il Pacioli non fece, fu fatto di poi, e la dimostrazion algebraica più comune a' nostri tempi altro non è appunto che la geometrica di lui a letterali simboli trasportata. In breve è tale: sia da moltiplicare $a-b$ con $c-d$, si avrà $(a-b)\times c - d(a-b)$; moltiplicando $-d$ per a, nel prodotto $-da$ si toglie troppo, dovendosi toglier d non tante volte, quante importa tutto a, ma solamente quante importa a diminuito di b: dunque a restituire il di più tolto, che è $-db$, bisogna che $-d \times -b$ dia $+db$. Taluno, lasciato il ragionamento sul di più tolto, ha amato di ridurre la cosa ad una evidenza di fatto nella moltiplica di $-b$ per $a-a$, la quale è manifesto dover porgere zero, essendo $a-a=0$. Or è conceduto che $-b \times a = -ab$, dunque ad ottener $-b \times (a-a) = 0$ dèe esser $-b \times -a = +ab$, venendone così $-ab+ab=0$. Bella lode d'ingegno merita il pensiero del signor Leonardo Salimbeni di trarre dall'unica evidentissima regola $+\times+=+$ in un colpo le altre tre $-\times+=-$, $+\times-=-$, $-\times-=+$. Ecco la sua dimostrazione con le stesse di lui parole: *Sieno l'*$m-n$, *e l'*$a-b$ *due numeri complessi di numeri semplici positivi e negativi; cioè l'*$m-n$ *del positivo* m *e del negativo* n, *e l'*$a-b$ *del positivo* a, *e del negativo* b. *Dico che il prodotto dell'*$m-n$ *nell'*$a-b$ *è uguale al numero complesso dei prodotti* ma, mb, na, nb, *con questa regola, che l'*ma, *e l'*nb *che derivano, il primo da numeri semplici positivi, ed il secondo da numeri semplici negativi, debbono essere amendue positivi; ma l'*mb *e l'*na *che derivano da numeri semplici, uno positivo e l'altro negativo, debbono essere amendue negativi; vale a dire il prodotto dell'*$m-n$ *nell'*$a-b$ *è uguale all'*$ma-mb-na+nb$. *Imperocchè suppongasi* $m-n=d$, *e l'*$a-b=q$: *adunque* $m=n+d$, *e* $a=b+q$; *laonde sarà* $ma=nb+nq+db+dq$. *Ed aggiungendo al secondo membro, e togliendo dallo stesso la grandezza* nb, *sarà ancora* $ma=nb+nq+db+dq+nb-nb$, *ovvero dando un ordine differente allo stesso secondo membro, sarà* $ma=nb+db+nb+nq+dq-nb$. *Ma* $nb+db$ *è uguale al prodotto dell'*$n+d$, *cioè del* m *nel* b, *e però è uguale all'*mb; *e parimente* $nb+nq$ *è uguale al prodotto dell'*n *nel* $b+q$, *cioè nell'*a; *e però è uguale all'*na. *Per conseguenza* $ma=mb+na+dg-nb$; *laonde* $dq=ma-mb-na+nb$. *Egli è poi il* dq *il prodotto del* d *nel* q, *o dell'*$m-n$ *nell'*$a-b$; *quindi il prodotto dell'*$m-n$ *nell'*$a-b$ *è uguale all'*$ma-mb-na+nb$; *il che conveniva dimostrare*. È chiaro, che il prodotto *nb*, che l'egregio autore, a tessere la squisita sua dimostrazione, aggiugne, e sottrae, è quello stesso, che su la immediata moltiplica di $m - n$ con $a - b$ ragionando dimostrasi oltre dovere in $- n a$ tolto, e necessario a restituirsi; per lo che conchiudesi necessario il prender $- n \times - b = + n b$, ed in genere $- \times - = +$: onde apparisce, che quella industria analitica piglia il luogo di questo metafisico ragionamento, e rende la dimostrazione da esso indipendente.

Dopo siffatto ragionamento in figura geometrica espresso progredendosi da Fra Luca al tirare a conseguenza il teorema: *meno in meno moltiplicato produr più*: contro di tal progresso, contro sì maraviglioso teorema levossi ben presto Cardano, dapprima nel capo XXII del libro *De regula Aliza* l'anno 1545, poi nel sermon *De plus et minus*, che trovasi verso il fine del tomo IV delle sue opere. L'obbietto di Cardano si è questo: Sia $ABCD$ (*Fig.* 8) un campo di cinque misure nella lunghezza BC, e di altrettante nella larghezza BA; ma non spetti a te che il terreno chiuso dalle tre misure di lungo $BF = BC - FC$, e dalle tre misure di largo $BE = BA - EA$: sarà dunque tuo il terreno quadrato EF, e sarà tutto d'altrui il gnomone EDF, il qual comprende tre parti, il rettangolo EG, il quadrato GH, ed il rettangolo HF. Or il rettangolo EG è il prodotto di $- EA$ in EH, ed il rettangolo HF è il prodotto di HC in $- FC$, e questi due rettangoli perchè hanno un lato negativo si concedono negativi; ma il quadrato HD prodotto di $- GK$ in $- KH$ è d'altrui niente meno che i due rettangoli: dunque anch'esso riconoscer si dèe per negativo nulla men che i due rettangoli: dunque $-$ moltiplicato in $-$ dà $-$, non $+$, o sia $- \times - = -$, non $= +$. E vero è poi ché se dal quadrato intero $ABCD$ invece di sottrarre il solo gnomone EDF si sottraggano i due rettangoli $EADH$, $GDCF$, per ragion di sottrarsi due volte il quadrato $KGDH$, in luogo di provenirne il solo quadrato $EBFK$, proviene $EBFK - KGDH$; onde ad aver soltanto $EBFK$, conviene, per riparar al troppo tolto, aggiugner $KGDH$. Ma ciò che prova? Non altro certamente fuorchè non dovevasi dal quadrato $ABCD$ sottrarre più del gnomone, e che sottratto avendovi di più il quadrato $KGDH$, è uopo restituirglielo, aggiugnendolo in qualità di positivo: questo è tutto ciò, che prova l'argomento; non mai, che il quadrato $KGDH$ contenuto nel gnomone di altrui, tra i due negativi rettangoli $EAGH$, $KHCF$, ed al pari e in un con loro manifestantesi negativo, sia positivo, sia tuo. Ed a render la cosa vie più chiara, cerchisi il quadrato $BEKF$, dapprima per il teorema 4.° del II degli Elementi di Euclide, e di poi per il teorema 7.° Pel 4.° si ha $DABC = BEKF + KGDH + AEGK + KHFC$, e pel teorema 7.° $DABC + KGDH = AEHD + GDCF + BEKF$. Dalla prima equazione si cava $BEKF = DABC - AEGK - KHFC - KGDH$; dalla seconda proviene $BEKF = DABC - AEHD - GDCF + KGDH$. In questa espressione di $BEKF$ corollario del teorema 7.° il quadrato $KGDH$ resulta affetto del segno $+$, o positivo; ma è evidente la ragione: nasce ciò dall'aggiugnersi nel teorema 7.° all'intero quadrato $DABC$ il quadrato $KGDH$, e stabilirsi di questa somma la composizione. Ma dal teorema 4.°, che insegna la semplice composizione del quadrato $DABC$, segue ad immediato corollario, nella espressione di $BEKF$ trovarsi il quadrato $KGDH$ affetto del segno $-$, non altrimenti che i due rettangoli $AEGK$, $KHCF$: laonde manifestasi essere e il quadrato $KGDH$, e i due rettangoli $AEGK$, *KHCF* in rispetto al quadrato *BEKF* della medesima condizione, cioè tutti e tre negativi, e di altrui posto il quadrato *BEKF* positivo, posto tuo. A intender nel suo vero spirito, e giusto confine il cardanico obbietto, non ferisce egli l'operazione di pigliare, in genere nella moltiplica di $a - b$ in $c - d$ per parti, positivamente il prodotto bd delle due parti $-b$, $-d$ l'una per l'altra, essendo ciò per il teorema 7.° del II di Euclide necessario a giusto compenso, dopo aver da ac sottratti i prodotti bc, ad: la regola di così operare in tal moltiplica è d'intrinseca coerenza, la dimostrazion sin qui è irrefragabile; l'obbietto riguarda, e combatte l'avanzarsi alla conseguenza, che — in — produca +. Questa conseguenza però non potea senza contraddizione esser da Cardano riputata illegittima, e falsa relativamente alla moltiplica di — in — in quanto in stato complesso: onde la sua quistione non potè mirare che alla moltiplica di — in — in quanto in stato separato e semplice; ed in ultima analisi non si può nell'obbietto di Cardano scorgere che il volgimento dalla considerazione dell'effetto della moltiplica di — in — nello stato complesso alla considerazione dell'effetto della moltiplica di — in — nello stato puro, e sciolto. E non è maraviglia, che Cardano a tal considerazion si volgesse, egli, che discoprì le radici negative delle equazioni. Persuaso Cardano per le sopra additate ragioni, che l'effetto vero di — in — fosse —, studiasi di render ragione perchè + in + faccia solamente +, e — sì in — che in + faccia —. Ascoltisi qui da lui stesso il vago suo discorso: *Dico quod* m: (*minus*) *oportet supponere tanquam non sit de ipso* p: (*plus*) *est enim alienum, ideo ad construendum oportet assumere plura, ad destruendum sufficit unum. Ad hoc ergo ut* p: *constituatur, oportet ut* p: *in* p: *ducatur, nam cum ducitur* p: *in* m: *seu in alienum fit* m: *quia nihil potest ultra vires suas, ergo* p: *potest quantum est ipsum, igitur cum ducitur extra ipsum producit* m: *aliter posset plus producere quam potestate esset. Sed cum ducitur in aliud* p: *non potest etiam nisi quantum potest in partes illius* p:. *Exemplum, 6 ducitur in 10, igitur in 6 et 4, sed ut in 6 non potest ultra 36; ut autem 4 ducitur in 6 non potest nisi ut in 4 et 2, et ut in 4 nisi ut in seipsum, igitur non potest nisi usque ad 16, et ut residuum 2 in 4 nisi ut in 2 et 2, igitur non potest nisi 4 et 4; sed 36, 16, 4, et 4 producunt 60; igitur 6 in 10 non potest producere nisi 60: igitur* m: *in* m:, *seu alienum in alienum, et* m: *in* p:, *seu* p: *in* m:, *seu quod est in alienum, seu alienum in id quod est, producunt* m: *solum seu alienum: quod erat demonstrandum*. Scorgesi che tutto il ragionar di Cardano appoggiasi sul considerar il negativo quale alieno. Se abbia solidità questa considerazione, o se sia un giuoco di idee il vedrem facilmente dopo che definita avremo la vera qualità dell'effetto del semplice — moltiplicato nel semplice —. Sebbene prima di ciò: è ella possibile tale moltiplicazione?

Il Wolfio al num. 34 dell'algebra risponde che no: *Quantitas privativa per privativam proprie loquendo multiplicari nequit: id quod ipsa notio quantitatis privativae insinuat, ut pote quae repugnat actui positivo, qualis est iterata ejusdem quantitatis additio, in qua multiplicatio consistit. Quare haec multiplicatio proprie tantum locum habet ubi privativae positivis junguntur*.

Dottrina in parte conforme con più sottili idee espose il nostro italiano Venini ne' suoi *Elementi di matematica*, volume I pag. 135. A non dettrarle un atomo, e presentarla nel suo intero sistema recherò, sebben alquanto a lungo i detti stessi di lui: *Quando una quantità ammette due determinazioni contrarie, allora chiamando una delle determinazioni positiva, l'altra divien negativa ...... Per la qual cosa ognuno intenderà facilmente, che le quantità si posson considerare in due sensi assai diversi fra loro, l'uno astratto, in cui si prescinde da tutte le modificazioni, che non sono di semplice quantità, e l'altro determinato, in cui si ha riguardo anche alle diverse relazioni estrinseche, che una quantità può avere ad un'altra. Quando adunque una quantità si chiama positiva, o negativa, segno è, che si prende in un senso determinato. Ciò posto, che cosa seguirà, se le quantità, che si voglion moltiplicare avranno qualche particolar determinazione? Moltiplicare una quantità per un'altra significa prendere una delle quantità tante volte, quante sono le unità dell'altra. Adunque il moltiplicatore non può far altro che indicare con le sue unità quante volte si abbia a prendere il moltiplicando, vale a dire, che il moltiplicatore deve necessariamente essere un numero astratto. Quindi se una quantità positiva dovrà moltiplicarsi per una quantità astratta, il moltiplicatore astratto indicherà quante volte si deve prendere la quantità positiva, che serve di moltiplicando, e per conseguenza il prodotto sarà positivo. Così se un mercante guadagna ogni giorno 5 lire, per avere il guadagno totale, che egli fa in 10 giorni, si deve moltiplicare il numero 5 positivo delle lire pel numero astratto 10 dei giorni, e il prodotto sarà di 50 lire positive. Medesimamente se una quantità negativa si moltiplicherà per un astratta, egli è chiaro, che prendendosi un certo numero di volte la quantità negativa, il prodotto sarà negativo. Così se un mercante farà ogni giorno un debito di 5 lire, dopo 10 giorni il* *suo debito sarà di 50 lire, ove si vede, che il numero negativo —5 moltiplicato per l'astratto 10 dà per prodotto il numero negativo —50. Conchiudiamo adunque, che il prodotto di una quantità positiva moltiplicata per un'astratta è sempre positivo, e quello di una negativa per un'astratta sempre negativo. E perchè anche alle quantità astratte si suol premettere il segno +, e si chiamano positive, sogliono gli algebristi esporre le due regole precedenti in quest'altra maniera: il prodotto di due quantità positive è sempre positivo, e quello di una positiva per una negativa sempre negativo. Bisogna però confessare, che questa confusione dell'astratto col positivo ha prodotto non pochi equivoci, e suole imbarazzar moltissimo la mente dei principianti. Ma cosa succederà se tanto il moltiplicatore, quanto il moltiplicando saranno due quantità determinate, amendue o positive, o negative? La risposta è facile, cioè, che sino a tanto che le due quantità si lascieranno nel loro senso determinato, non potrà aversi alcuna idea della moltiplicazione, e che a questo fine bisognerà prescindere dalle loro particolari determinazioni, e prenderle astrattamente. Infatti non si verificherà mai il caso pratico, in cui una quantità positiva, o negativa debba attualmente moltiplicarsi per un'altra positiva anch'essa, o negativa. Or se due quantità si prendono astrattamente, anche il loro prodotto dovrà essere astratto, o, come altri lo chiamano, positivo. E quanto si è detto della moltiplicazione di due quantità diverse si applichi anche alla moltiplicazione di una quantità per sè stessa. Imperocchè quando una quantità si deve moltiplicar per sè medesima, essa fa nello stesso tempo le veci di moltiplicando e di moltiplicatore. Ma per essere moltiplicatore conviene, che sia astratta. E' dunque necessario di prendere la detta quantità astrattamente, onde anche il suo* *prodotto verrà ad essere astratto, o positivo. Si osservi ora, che il prodotto di una quantità moltiplicata per sè medesima si chiama il suo quadrato, e se ne conchiuderà che tutti i quadrati sono essenzialmente del genere delle quantità astratte. Chi cercasse adunque una quantità, il cui quadrato sia negativo cercherebbe una quantità assurda, contraddittoria, e come gli analisti la chiamarono immaginaria. Ma applichiamo per maggior chiarezza quanto finora si è detto universalmente ad un esempio particolare. Abbiamo osservato sopra, che i beni possono essere o positivi, o negativi, secondo che consistono in fondi reali, in denari, in crediti, ovvero in debiti. Dunque se si prenderà una certa quantità di beni astrattamente, essa non sarà nè positiva, nè negativa, ma ammetterà amendue le determinazioni, e tanto potrà consistere in fondi, o crediti, quanto in debiti. Supponiamo ora, che ne sia proposto il seguente problema: I beni di Pietro son doppj di quelli di Paolo, e il loro prodotto è uguale a 18 lire: si cercano i beni dell'uno, e dell'altro. Sia* x *il numero delle lire di Pietro, ed* y *quello delle lire di Paolo. Sarà dunque per la prima condizione* $x = 2y$, *e per la seconda* $xy = 18$. *Si sostituisca nella seconda equazione il valor di* x *cavato dalla prima, e si avrà* $2y^2 = 18$, *e dividendo per* 2, $y^2 = 9$. *Or questa equazione significa, che* y *è uguale a quel numero, il quale moltiplicato per sè stesso dà per prodotto il numero* 9. *Ma questo numero non può esser altro che il 3 preso astrattamente, affin di poterlo moltiplicar per sè stesso. Conchiudiam dunque, che* y *è uguale al numero 3 preso astrattamente. Ma qui si osservi, che ogni numero preso astrattamente può ammettere due determinazioni diverse, e contrarie, l'una positiva, e l'altra negativa, e che per conseguenza l'*y *tanto potrà esser uguale a* $+3$, *quanto a* -3. *Or se* $y = -3$, *sarà* $x = +6$, *e se* $y = -3$, *sarà* $x = -6$. *E di qui è, che il problema ammette due soluzioni, vale a dire, che in due maniere diverse se ne posson verificare le condizioni; la prima è, che i beni di Pietro sieno di* 6 *lire di fondi, o di crediti, e quei di Paolo di* 3; *e l'altra, che Pietro abbia* 6 *lire di debiti, e Paolo* 3. *Infatti così in un caso, come nell'altro non può farsi la moltiplicazione dei detti numeri senza prendergli astrattamente, e per conseguenza amendue i prodotti sono uguali al numero astratto* 6. *Che se nelle condizioni del problema si fosse detto, che il prodotto dei beni di Pietro, e di Paolo è di* 18 *lire di debito, cioè* $= -18$, *la seconda equazione sarebbe stata* $xy = -18$, *e quindi* $2y^2 = -18$, *ed* $y^2 = -9$. *Or questa equazione fa vedere, che il problema è impossibile, poichè la quantità* y, *il cui quadrato deve essere uguale al numero negativo* -9, *è contraddittoria, e immaginaria. E questo serve a porre ancora più in chiaro, che il prodotto dei due numeri deve necessariamente essere astratto, e quindi, che amendue i numeri si devon considerare astrattamente, affin di moltiplicarli fra loro.*

Tiene altrimenti il comune degli analisti: essere ciò il prodotto di $-$ in $-$, non già astratto, ma determinatamente positivo; del che varie dimostrazioni si recano. Reyneau nella *Scienza del calcolo*, e l'italiana Ipazia, l'Agnesi nelle sue *Istituzioni analitiche* si valgono della notissima proporzione inchiusa nella natura della moltiplica, di stare l'unità al moltiplicatore come il moltiplicando al prodotto; laonde avendo a moltiplicare $-a$ in $-b$ sarà $1 : -b :: -a : +ab$, perchè $-b$ contiene 1 numero di volte b in senso negativo: dunque il quarto termine della proporzione conterrà similmente numero di volte b in negativo senso la negativa quantità $-a$; dunque esso quarto termine, cioè il prodotto di $-a$ in $-b$ sarà positivo. Si spedisce ancor più brevemente l'Eulero ne' suoi *Elementi di algebra* con un argomentazione *per contrario*: $-a$ per $+b$ dà $-ab$, e $-a$ per $-b$ non può produrre il medesimo risultato, ma l'opposto; dunque $+ab$. Nelle *Istituzioni analitiche* socievolmente composte da Vincenzo Riccati, e da Girolamo Saladini leggesi una dimostrazione, cui l'Alembert eziandío nella *Enciclopedia* artic. *Multiplication* tributa le lodi di nuova, ed ingegnosa, ed in francese linguaggio per intero traduce. Io la darò nel suo originale: *Quoniam multiplicator nihil aliud ostendit, nisi quoties multiplicanda quantitas sit accipienda, jam si haec positiva sit, et ille pariter positivus, erit quoque productum ut patet positivum, eoque majus, quo multiplicator ipse major erit, et minus, quo minor; ergo si multiplicator sit zero, erit zero etiam productum; ergo si magis decrescat multiplicator, et fiat minor quam zero, hoc est negativus, etiam productum magis decrescat necesse est, fiatque minus quam zero, seu negativum. En igitur quomodo sit manifestum, productum positivae quantitatis per negativam multiplicatae esse negativum. Suppone modo quantitatem negativam per positivam multiplicari oportere. Jam ex demonstratis erit productum negativum, et eo minus in hoc ordine, hoc est tanto minus quam zero, quanto ipse multiplicator crescit, seu major est, et quanto multiplicator fiet minor, tanto productum erit minus in ordine negativorum, hoc est tanto propius accedet ad zero; ita ut crescat semper productum, si decrescat multiplicator: ergo cum hic est zero, productum erit zero: ergo si magis etiam multiplicator decrescat, nempe si negativus fiat, crescet magis productum, adeoque erit majus quam zero ac consequenter positivum, quantitas igitur negativa per negativam multiplicata productum dabit* *positivum*. Comecchè stimasse l'Alembert per tale dimostrazione felicemente spiegato il paradosso, che — per — dia +, prende egli cionulladimeno a discuterlo sotto altro aspetto, esaminando la maniera onde li segni agiscono gli uni su gli altri: *Examinons la maniere, dont les signes agissent les uns sur les autres. Il faut prouver que* $+\times+=+$; *que* $+\times-=-$; *que* $-\times+=-$; *que* $-\times-=+$. 1.° $+3\times+4$ *doit donner* $+12$; *car le multiplicateur* $+4$ *étant affecté du signe* $+$, *montre qu'il faut prendre la quantité* $+3$ *positive autant de fois qu'il est marqué par* 4; *c'est-à-dire qu'il faut la prendre* 4 *fois telle qu'elle est: or* 4 *fois* $+3=+3+3+3+3=+12$; *ainsi* $+\times+=+$. 2.° $+3\times-4=-12$. *Remarquez que le multiplicateur* 4 *étant affecté du signe* $-$, *fait connoître qu'il faut retrancher la grandeur* $+3$ *quatre fois; on écrira donc* $-3-3-3-3=-12$. *On voit donc pourquoi* $+\times-=-1$. 3.° $-3\times+4=-12$; *car le multiplicateur* 4 *étant positif signifie qu'il faut prendre* -3 *quatre fois, et par conséquent écrire* $-3-3-3-3=-12$; *ainsi* $-\times+=-$. 4.° $-3\times-4=+12$. *On doit toujours se régler sur le signe du multiplicateur: son signe étant negatif, le multiplicateur* -4 *indique qu'il faut retrancher* -3 *quatre fois: or pour ôter* $-$, *on écrit* $+$. *Donc, pour ôter* -3 *quatre fois on écrira* $+3+3+3+3=+12$; *et par conséquent* $-\times-=+$. Più di un secolo però avanti l'Alembert usò tal dimostrazione il Wallis, ed è essa oggidì la più adottata. Non tralascierò di rammemorare l'osservazione aggiunta dall'abate Marie, e con esso dal Canovai, e del Ricco benemeriti di aver con lo stesso conciso stile recate a tanta ampiezza le lezioni di lui. *Ici* (dice Marie) *remarquerons, en passant, que si l'usage n'autorisoit pas cette maniere de s'exprimer,* *rien ne seroit plus absurde que de dire* $+\times+=+\ldots\ldots$ $+\times-=-\ldots\ldots-\times-1=+$. *Car enfin ce ne sont pas des signes que l'on multiplie, mais seulement des quantités.* Dovendosi tuttavía, giusta il parlare massimamente del d'Alembert, distinguere in concetto la moltiplica di quantità con quantità, e l'azione del segno del moltiplicator sopra il segno del moltiplicando; questa azione, riguardando la moltiplica, ed essendo essa, che determina il segno del prodotto della moltiplicazion delle quantità, pare in conseguenza, che non lasci senza ragione, ed abbastanza giustifichi le esposte espressioni, dando appunto a $-\times-=-$, per esempio, il senso, che l'azione del $-$ del moltiplicatore sopra il $-$ del moltiplicando ha per effetto, ed al prodotto delle quantità appone il $+$. Unendo i pareri, vedesi non esservi concetto, che al prodotto di quantità negativa in quantità negativa assegnato non siasi, facendosi determinatamente negativo, determinatamente positivo, indeterminato ad astratto.

Tra sì discordi opinioni io comincio dal considerare la cosa geometricamente. Dal punto C (*Fig.* 13) tiro a destra la retta CB, che considero positiva, e chiamo $+x$; la prolungo in contraria parte a sinistra, e considerando CA negativa, la segno $-x$. Dal medesimo punto C ergo perpendicolare ad AB la retta CD, che prendo per positiva ordinata, e noto $+y$. Fo scorrer questa parallela a sè stessa lungo $CB=+x$, con che mi si produce il rettangolo $CDRB=+y\times+x$; facendola scorrere in contrario per la $CA=-x$, si produce il rettangolo $CDQA=+y\times-x$. Abbasso dal punto medesimo C perpendicolarmente alla retta stessa AB la ordinata CE, che, siccome tendente contrariamente alla CD, riguarderò in confronto qual negativa, e segnerò $-x$. Se la fo scorrere per $CB = +x$ vien prodotto il rettangolo $CESB = -y \times +x$, e se al contrario la fo scorrere per $CA = -x$ prodotto viene il rettangolo $CEPA = -y \times -x$. È evidente, che i rettangoli $+y \times +x$, $-y \times -x$ hanno situazioni ben differenti. Che intendesi dunque con dire, che sono l'uno e l'altro positivi? Che coincidono? Nulla di più falso. Che stanno alla stessa banda di una retta? Ciò non si verifica, nè rapporto alla retta AB, nè rapporto alla retta DE. Stanno alla parte medesima rapporto alla retta AB, i due rettangoli $+y \times +x$, $+y \times -x$ al disopra, ed i due $-y \times +x$, $-y \times -x$ al di sotto; stanno alla stessa parte rispetto alla retta DC i due $+y \times +x$, $-y \times +x$ a destra, ed i due $+y \times -x$, $-y \times -x$ a sinistra: ma i due rettangoli $+y \times +x$, $-y \times -x$ sono contrariamente posti rispetto ad ambedue le rette, e rispetto alla AB, e rispetto alla DE, si oppongono eglino al vertice in C, e tendono contrariamente per ogni direzione. Chi argomentasse: il rettangolo $CDQA$ è contrario, e negativo rispetto al rettangolo $CDRB$; il rettangolo $CEPA$ è contrario al rettangolo $CDQA$; dunque il rettangolo $CEPA$ è positivo: chi così argomentasse, peccherebbe in forma, non avvertendo che la contrarietà dei rettangoli $CDRB$, $CDQA$ è relativa alla linea CD, e la contrarietà dei rettangoli $CDQA$, $CEPA$ è relativa alla retta CA; onde l'argomento viene ad avere quattro termini. E poi per essersi il rettangolo $CDQA$ fatto negativo tra i due $CDRB$, $CDQA$, non ne segue di necessità, che debba prendersi similmente a negativa tra i due $CDQA$, $CEPA$, e nulla impedisce, che per l'opposto gli si dia la qualità di positivo. Lo stesso dicasi del rettangolo $CESB$: questo è contrario, e negativo rispetto al rettangolo $CDRB$, ma relativamente alla retta CB; è egli medesimo contrario al rettangolo $CEPA$, ma relativamente alla retta CE, le contrarietà han relazion diversa, e son diverse: l'assegnamento della qualità di negativo al rettangolo $CESB$ tra i due $CESB$, $CDRB$, non importa di necessaria conseguenza l'assegnamento della stessa qualità a lui tra i due $CESB$, $CEPA$. Cionulladimeno l'attribuire al rettangolo $CDQA$, ed istessamente al rettangolo $CESB$ un concetto costante, di negativo cioè in ambidue i rispetti, in rispetto al rettangolo $CDRB$, ed in rispetto al rettangolo $CEPA$, è ciò, che è più naturale, più semplice, ed alla continuità conforme. Così dal positivo $CDRB$ si passa al negativo $CDQA$, da questo negativo al positivo $CAPE$, da questo positivo al negativo $CESB$, e da questo negativo ritornasi al positivo $CBRD$: l'alternativa è continuata, e regolare. A formarsi un'idea più continua dei passaggi, si concepisca che $CB = +x$ si vada via via diminuendo sino ad annullarsi cadendo B in C, e che poi cresca da C in A divenendo $= -x$; il rettangolo positivo $CDRB$ continuamente diminuito si annienterà in CD, indi uscirà il rettangolo negativo $= +y \times -x$ stendentesi a $CDQA$. Concependo ora diminuirsi CD, e dopo il proprio annientamento in C emergere diretta da C in E, si diminuirà ed annullerà il rettangolo negativo $CDQA$, e si formerà il positivo $-x \times -y$ crescente in $CAPE$. Si diminuirà questo, e si annullerà in CE, diminuendosi $AC = -x$ sino ad annientarsi in C; donde rinascendo $= +x$ si genererà il rettangolo $-y \times +x$ dilatantesi via via in $CESB$; poscia questo diminuito grado grado, ed annullato, con il diminuimento, ed annullamento di EC, si riprodurrà il positivo $+x \times +y$ crescente in $CBRD$ con il rinascere di $+y$. Il rettangolo $CEPA$, ed il rettangolo $CDRB$ convengono nell'aver gli stessi negativi, ed in esister fra loro; ma hanno ai negativi medesimi una relazione reciproca: il negativo $CDQA = +y \times -x$ è rispetto al $CDRB = +y \times +x$ negativo relativamente alla retta DE, e rispetto al $CEPA = -y \times -x$ è negativo relativamente alla retta AB; e reciprocamente il negativo $CESB = -y \times +x$ rispetto al $CDRB$ è negativo relativamente alla retta AB, e rispetto al $CEPA$ relativamente alla retta DE: tanto l'esistenza stessa fra i due negativi comuni è nei rettangoli $CDRB$, $CEPA$ dissimile. Sono amendue positivi, ma sì lontani dall'aver una identica situazione, che si oppongono anzi al vertice, e tendono per ogni verso contrariamente, sono contrarj in angolo. Lo stesso è però dei due negativi. Farebbero pertanto di mestieri, a distinguer precisamente le posizioni, di quattro segni, per ciascun dei quattro rettangoli il suo. Se uniscansi nella formola $-xy$ i due negativi $+y \times -x$, $-y \times +x$, del pari unir si potranno nella formola $+xy$ i due positivi, $+y \times +x$, $-y \times -x$. Può avervi cagione, e pericolo di errore in tali unimenti? Non già, purchè si tenga bene a mente, che le formole $+xy$, $-xy$ hanno l'una e l'altra una duplice rappresentazione, di due prodotti, cioè o rettangoli al vertice opposti. L'uso però di quattro segni avrebbe due vantaggj. Resterebbe così preoccupata la difficoltà, che una quantità negativa $-y$ in altra negativa $-x$ moltiplicata dia prodotto positivo, avvisando la diversità del segno, non esser tal positivo prodotto, quello stesso dalla moltiplica della positiva quantità $+y$ nella positiva $+x$ proveniente, ma ben diverso. Schiverebbesi in oltre la incertezza, nella quale in trigonometría cercando un angolo, ed in astronomía cercando il luogo di un pianeta si cade, qualora l'angolo, o il luogo del pianeta resulti espresso per il prodotto del seno, e del coseno, potendo ugualmente tal prodotto dinotare un punto nel primo, e nel terzo quadrante del cerchio, se fornito del segno $+$; ed un punto nel secondo e nel quarto quadrante del cerchio, se affetto del segno $-$. Se non che proseguendo su tal sistema di precise distinzioni, moltiplicherebbersi di soverchio gli algebraici segni. Si concepisca dal punto C eretta su in alto, perpendicolarmente al piano della carta, una retta, che dinoterò per $+z$, ed intendasi, che il rettangolo $QPSR$ scorra parallelo a sè stesso per questa altezza $+z$; i quattro rettangoli, ne' quali esso rettangolo intero è diviso, formeranno altrettanti, cioè quattro solidi diversamente situati. E se dallo stesso punto C s'immagini calata in giù sotto il piano della carta, perpendicolarmente ad esso, una retta $-z$, discendendo il rettangolo intero $QPSR$ per la profondità $-z$, si genereranno quattro altri solidi contrariamente ai quattro primi situati in relazion al piano della carta: laonde, a distinguer le otto diverse situazioni, sarebbe uopo di otto segni differenti. Ristretto a due il numero degli otto segni, ciascuna delle due formole, $+xyz$, $-xyz$ avrà una quadruplice rappresentazione, cioè la prima dei quattro solidi $+x\times+y\times+z$, $-x\times-y\times+z$, $-x\times+y\times-z$, $+x\times-y\times-z$; la seconda dei quattro $+x\times+y\times-z$, $-x\times-y\times-z$, $-x\times+y\times+z$, $+x\times-y\times+z$. Conservata memoria di questa quadruplice rappresentazione non si caderà in equivoco; se però dei quattro solidi si desideri uno, piuttosto che gli altri, sarà d'uopo di un dato particolare, che, togliendo la incertezza, lo determini. Sebbene poi la moltiplica di una retta con altra rappresenti naturalmente una superficie, non è però questo il solo uso di essa, ma impiegasi altresì a determinar una semplice retta per proporzione; e posta a primo termine della proporzione la retta presa ad unità, ed espressa per 1, la retta quarta proporzionale, soppresso il divisore 1, si rappresenta per il prodotto delle due rette medie. Dopo aver pertanto veduti gli effetti dei segni delle rette fra loro moltiplicate nelle prodotte superficie, vediamone gli effetti nelle rette proporzionalmente determinate. Condotta (*Fig.* 14) la retta ML si tagli nel punto C con la retta HK formante i due acuti angoli, al vertice opposti, uguali, KCL, HCM, l'un sopra, l'altro sotto essa retta ML. Si prenda da C in L la retta Ct, e considerandola per l'unità delle rette, si faccia $=+1$; dal punto t si alzi l'ordinata $+y$ riguardando per positive le ordinate sopra la retta ML; se lungo CL piglisi da C una qualunque altra distanza CB, la quale chiamisi $+x$, e si alzi la ordinata perpendicolare BP; per la similitudine dei triangoli sarà $+1:+y::+x:BP$; conseguentemente $BP=\frac{+y\times+x}{+1}$, e soppresso, e sottinteso il divisor $+1$, $BP=+y\times+x$. Se ora si concepisca, che l'ascissa $CB=+x$ si faccia continuamente minore, BP diverrà anch'essa in proporzione minore, e si annullerà in C, annientandosi in C l'ascissa $+x$; ed uscendo da C l'ascissa contrariamente diretta verso A cioè negativa $=-x$, l'ordinata, che deve terminare alla retta HK, caderà sotto la retta ML nell'angolo MCH, e nel punto per esempio A, cioè divenuta l'ascissa negativa $-x=CA$, l'ordinata si stenderà da A in Q, ed attesa la similitudine dei triangoli Ctr, CAQ, sarà $+1.+y::-x:AQ=\frac{+y\times-x}{+1}=+y\times-x$. L'ordinata BP situata sopra l'asse delle ascisse ML è positiva, e l'ordinata AQ situata sotto il medesimo asse è negativa; dunque la retta quarta proporzionale dopo $+1$, $+y$, $+x$, ed $= +y \times +x$ è positiva; e la retta quarta proporzionale dopo $+1$, $+y$, $-x$, ed $= +y \times -x$ è negativa. Al presente all'ascissa $Ct = +1$, in luogo dell'ordinata positiva $+y = tr$, applichiamo l'ordinata negativa $tv = -y$, e per li punti v, C tiriamo la retta GCF. Prendendo $CB = +x$, e da B, perpendicolarmente a CL, calando l'ordinata BR, a cagione della simiglianza dei triangoli Ctv, CBR, sarà $+1 : -y :: +x : BR = \frac{-y \times +x}{+1} = -y \times +x$. Ed immaginandoci continuamente decrescente $CB = +x$, sino ad annullarsi in C, si accorcierà in proporzione continuamente BR sino ad annientarsi in C. Rimane di sapere, ed è ciò che precipuamente importa, dove, e come posta sarà la retta quarta proporzionale dopo $+1$, $-y$, $-x$, ed uguale a $\frac{-y \times -x}{+1}$, o sia $= -y \times -x$. Dopo annientata pertanto la $+x$, e congiuntamente la BR in C, esca quinci la $-x$; non è egli evidente, che l'ordinata corrispondente, dovendo alla retta GF terminare, caderà nell'angolo MCF? Dunque fatta per esempio $-x = CA$, sarà l'ordinata dal punto A la retta AO, e giusta la similitudine dei triangoli Ctv, CAO sarà $+1 : -y :: -x : AO$, ed in conseguenza $AO = \frac{-y \times -x}{+1} = -y \times -x$. Si alza la AO sopra l'asse delle ascisse ML, non altrimenti che la BP, e perciò, similmente che questa, è positiva; e la BR cade sotto dell'asse delle ascisse ML del pari che la AQ, laonde sono ambedue negative: ma la positiva $AO = -y \times -x$ appartiene ad un luogo geometrico, che è la retta GF, diverso dal luogo geometrico, al quale appartiene la positiva $BP = +y \times +x$, essendo luogo geometrico di questa la retta HK; e la prima è compresa in un angolo MCF, che guarda contrariamente dell'angolo LCK, dentro il quale è compresa la seconda. La diversità medesima passa tra le due negative $AQ = +y \times -x$, $BR = -y \times +x$. Mi volgo già a contemplare la cosa aritmeticamente. Si richiami la progressione aritmetica (A)

$+n \ldots +4, +3, +2, +1, 0, -1, -2, -3, -4, \ldots -n$

Se si moltiplichi ogni termine per un numero qualunque positivo, o negativo $\pm y$, è per sè chiaro doverne resultare una progressione similmente aritmetica, ma di differenza continua $\pm y$, in vece di $+1$. Or moltiplicando per $+y$ i termini negativi $-1, -2, -3 \ldots$ concedesi negativi riuscire i prodotti; dunque moltiplicando per $+y$ il membro dei termini positivi $+1, +2, +3 \ldots$ i prodotti saranno determinatamente positivi, non già astratti, e la intera progressione proveniente sarà (A')

$+ny \ldots +4y, +3y, +2y, +1y, 0, -1y, -2y, -3y, -4y \ldots -ny$

Cangisi $+y$ in $-y$, cioè propongasi di moltiplicare la progressione (A) per $-y$: per comun consenso il membro positivo $+n \ldots +4, +3, +2, +1$, moltiplicato per $-y$ darà una succession di prodotti negativi; ma la succession de' prodotti del membro negativo $-1, -2, -3, \ldots$ moltiplicato per $-y$ deve unitamente alla succession di quei prodotti negativi costituire una progressione continua di perpetua differenza $-y$; dunque le moltipliche dei termini negativi $-1, -2, -3 \ldots$ per $-y$ daranno prodotti determinatamente positivi, non mica astratti, e la progressione intera nascente sarà (A'')

$-ny \ldots -4y, -3y, -2y, -1y, 0, +1y, +2y, +3y, +4y \ldots +ny$

È manifesto, che questa progressione è rovescia della (A')

nata per la moltiplica di (A) in $+y$. Ritornando alla figura 14, e confrontando i resultati aritmetici con i geometrici, scorgesi facilmente, che la progressione (A') rappresenta la serie delle ordinate alla retta HK, espresse per $+y \times \pm x$, dando ad x successivamente i valori 0, 1, 2, 3....; e che la progressione (A'') rappresenta la serie delle ordinate alla retta contrariamente l'asse tagliante GF, espresse per $-y \times \pm x$. Si passa nella figura con cammino continuo dalla retta KH alla GF diminuendo grado grado $tr = +y$, annullandola in t, e riproducendola in contraria parte verso v sino ad esser $tv = -y$: la retta KH di questa guisa con rotamento continuo intorno al punto C si trasferisce in GF, il suo punto P in R, ed il suo punto Q in O. Con lo stesso graduale cangiamento di $+y$ in 0, e quinci in $-y$ la progressione (A') passerebbe gradualmente alla progressione (A''). Questa progressione non è che essa progressione (A') voltando in contrario il segno di ciascun termine ordinatamente: dunque la moltiplica per $-y$ non è in fondo che il volere l'effetto contrario della moltiplica per $+y$. Non si ha pena in concepire, ed ammetter ciò, qualora trattasi di moltiplicando positivo $+y$: ma non vale la ragione stessa per il caso di moltiplicando negativo? La dimostrazione appunto tessuta per mezzo delle progressioni (A), (A'), (A'') ha questo beneficio, di manifestare che l'una cosa è congiunta con l'altra; che siccome $+n \times -y = -(+n \times +y)$, così per intimo necessario vincolo $-n \times -y = -(-n \times +y)$: ciò che chiaro confermasi nella figura, non potendo esser contrariamente poste $BP = +x \times +y$, $BR = +x \times -y$, senza che ne segua che contrariamente poste pur sieno le due rette $AQ = -x \times +y$, $AO = -x \times -y$. In aritmetica moltiplica il moltiplicatore è propiamente di essenza astratto; quinci in rigore $\pm n\times+y=+(\pm n\times y)$, e conseguentemente $\pm n\times-y=-(+(\pm n\times y)$. Cioè nella aritmetica moltiplica tanto se il moltiplicator sia $+y$, quanto se sia $-y$, bisogna per un momento nell'atto della moltiplica prescinder dal segno del moltiplicatore, e considerarlo sol dopo, per assegnare al prodotto il conveniente segno. Il moltiplicatore astratto y non può alterare la qualità del moltiplicando sia positivo o negativo; dunque $\pm n\times y=\pm ny$, e perciò $\pm n\times+y=+(\pm ny)$: il significato dell' esterno segno positivo $+$ non può essere che di porre, tal qual è risultato, il prodotto $\pm ny$; e così solamente l'effetto della moltiplica aritmetica conviene con la determinazione geometrica delle rette BP, AQ. Abbiamo dunque semplicemente $\pm n\times+y=\pm ny$; conseguentemente $\pm n\times-y=-(\pm ny)$, significando l'esterno segno negativo $-$ la contrarietà, che dèe esser data al prodotto $\pm ny$; quindi sarà in fine $\pm m\times-y=\mp ny$, che è l'effetto aritmetico esattamente corrispondente alla geometrica determinazione delle due rette BR, AO.

Con la scorta di queste considerazioni è facile il discernere ciò, che vi abbia di più o men retto, più o men sodo, di difettoso ed insussistente nelle dottrine di Cardano, del Wolfio, del Venini, di Reyneau, e dell'Agnesi, di Vincenzo Riccati, di Wallis, e d'Alembert.

Quanto primieramente al Cardano si spetta, se tuo è soltanto il terreno $(AB-AE)(BC-CF)=BEKF$ (*Fig.* 8); essendo fuori del tuo, ed altrui il terreno $KGDH$ non meno, che i terreni $EAGK$, $KHCF$, egli è certamente negativo unitamente a questi due nel senso di non esser tuo. Ma non è questo il senso di negativo, di cui è quistione, nè toglie questo, che siccome i due rettangoli $EAGK$, $KHCF$ sono contrariamente posti, ed in tal senso negativi rispetto al rettangolo $BEKF$ relativamente alle due rette EH, GF; così essi due rettangoli medesimi $EAGK$, $KHCF$ sieno relativamente alle stesse due rette EH, GF, sebben reciprocamente, in contraria parte posti, ed in tal senso negativi, rispetto al rettangolo $KGDH$, e che questo in conseguenza si consideri positivo, non altrimenti che il rettangolo $BEKF$; con il riflesso però, che questi due positivi non sono coincidenti, o identici di luogo, anzi al vertice opposti, ma hanno comuni i due negativi. In prima origine dell'idea del *puro meno* o sia della quantità negativa fu detto *puro meno*, o quantità negativa il debito, cioè il denaro che ad altri devi, non il denaro che non hai.

Come mai potè il Wolfio ristrignere la moltiplica al caso, che le privative quantità sieno alle positive giunte, escludendone assolutamente le semplici e solitarie, senza avvedersi, che si chiudeva la via alla contemplazione del quadrato della quantità negativa, della radice negativa dell' equazione $x^2 = n$, ed in genere di qualunque negativa radice di una equazione di qualsivoglia grado? È vero è, che il moltiplicator aritmetico non si può concepir negativo: ma che perciò? Non si può egli concepire nè tampoco positivo, ma di sua natura addomanda concetto astratto. Si conchiuderà egli adunque non poter cadere la moltiplica che su due quantità, una delle quali sia astratta? Sarà così esclusa la moltiplica non solo di quantità negativa per negativa, e di positiva per negativa, come vuole il Wolfio nei teoremi 5.° e 6.°; ma del pari ed ugualmente di positiva per positiva, e di negativa per positiva, e inutili torneranno i teoremi 3.° e 4.° del Wolfio medesimo su le regole di tali moltipliche. Oltre di che, la moltiplica delle quantità privative alle positive giunte, esempigrazia di $+a-b$ in $+c-d$ non si risolve ella in quattro moltipliche di quantità semplici, e non comprende le combinazioni tutte di moltiplica, di positiva per positiva, di positiva per negativa, di negativa per positiva, di negativa per negativa? La conseguenza dunque sarebbe di riguardar per chimerica, e da bandirsi anche la moltiplica delle quantità privative alle positive congiunte. A salvar tutto, altro non vi ha che distinguere nel positivo, o negativo moltiplicatore il segno dal numero, prescinder per un istante dal segno, far la moltiplica, e poi richiamato in considerazione il segno del moltiplicatore, su di esso regolare il segno del prodotto, lasciandolo qual uscì, se il segno del moltiplicatore sia $+$, voltandolo in contrario se il segno del moltiplicatore sia $-$. Tutto ciò in aritmetica contemplazione; chè in geometrica, lungi dal dover per un momento prescindere dalla positiva, o negativa direzion dell'ascissa x, è anzi uopo fissarvi la prima attenzione, e tenervela nell'atto di far lunghessa scorrere l'ordinata $+y$, ovvero $-y$, onde concepire (*Fig.* 13) la generazione dei quattro distinti rettangoli, e (*Fig.* 14) la determinazione delle quattro rette quarte proporzionali. Queste Figure poi non ponendo nelle rette loro sott'occhi, che quantità positive, e negative semplici, ed i prodotti loro in tutte le combinazioni indistintamente, condannan sensibilmente di false le distinzioni, e le limitazioni del Wolfio.

Vuole il Venini, che qualora le due quantità date a moltiplicare sieno ambedue positive, od ambedue negative, si liberino ambedue dal segno comune, ed astrattamente si considerino; ma non reca di ciò ragione. E qual può esservene mai? Se essendo date a moltiplicare una quantità positiva, ed una negativa basta giusta lui stesso prendere astrattamente la quantità positiva, a fine di avere il moltiplicatore astratto; e perchè di due positive o negative non basterà pigliarne astrattamente una? Di qui però, nel caso delle due quantità negative, ne seguirebbe, che moltiplicata quella lasciata nella determinazion sua negativa per quella trasferita ad essere astratto, il prodotto riuscisse negativo, se dopo eseguita la moltiplica non si ritornasse coll' intelletto su la condizion negativa della quantità renduta per un momento astratta, e per tal condizione non si rivoltasse in contraria, cioè in positiva, la condizion negativa, sotto cui già per l'astrazione si presentò il prodotto. Il Venini, pigliate astrattamente ambedue le quantità o positive, o negative, pretende astratto il prodotto loro, senza più rivocare in conto il segno, la determinata condizione di esse. Ma io, nella moltiplica della progressione (A) per $+y$, e per $-y$, ho dimostrato, che i prodotti di numero positivo per positivo, e di negativo per negativo non sono astratti, ma sì bene determinatamente positivi, e che non può essere a meno, cioè per necessaria ed intima legge di continuità così è, dato che i prodotti di positivo per negativo, o di negativo per positivo sieno negativi. E vale ciò generalmente, per conseguenza anche del prodotto di positivo con positivo uguale, o di negativo con ugual negativo. Poichè qualunque sia il positivo numero $+y$, nel sinistro membro della progressione (A) indefinitamente continuato vi avrà un numero positivo ad esso $+y$ uguale; e similmente qualunque sia il numero negativo $-y$, nel membro destro indefinitamente continuato della progressione (A) vi avrà un numero negativo uguale ad esso $-y$.

Dunque il quadrato eziandío di quantità positiva, o di quantità negativa, è di determinata condizion; positivo, non astratto, come insegna il Venini. Riguardo al quadrato adduce il sottile autore una speciosa ragione di dover considerar astratte ambedue le quantità o positive, o negative da moltiplicarsi insieme. Il quadrato è la moltiplica di una quantità per sè medesima; se dato sia $+x$ da moltiplicare per $+x$, e si liberi il $+x$ preso a moltiplicatore dal segno $+$ per trasportarlo dalla determinazion positiva al concetto astratto, lasciando al tempo stesso nella stessa sua determinazion positiva l'altro $+x$ destinato a moltiplicando, per tale diversità tra il moltiplicatore, ed il moltiplicando non sussiste più l'idea di quadrato: dunque a formare quadrato, o sieno le due quantità uguali da moltiplicarsi insieme positive, o negative, è uopo privarle ambedue della comune loro determinazione, e trasferirle ambedue all'astratto concetto, ed il prodotto di esse sarà astratto, e conseguentemente ogni quadrato sarà per intima necessità naturale privo di determinazione, ed astratto. Questo nuovo teorema, a buoni conti, che a conseguenza si tira, si è per me dimostrato falso aritmeticamente; e più evidentemente è falso geometricamente; poichè nella figura 13 hanno manifestissimamente, non meno che i rettangoli $CDQA = +y \times -x$, $CESB = -y \times +x$, posizione lor propria, o determinazione i due rettangoli $CDRB = +y \times +x$, $CEPA = -y \times -x$, i quali diventan quadrati, presa $y = x$; e nella figura 13 nulla meno, che le rette $AQ = \frac{+y \times -x}{+1}$, $BR = \frac{-y \times +x}{+1}$, hanno posizione lor propria, o determinazione le rette $BP = \frac{+y \times +x}{+1}$, $AO = \frac{-y \times -x}{+1}$, le quali, posta $y = x$, rappresenteranno numeri quadrati. La falsità della conseguenza è accusa al discorso.

Ed in vero, l'idea di quadrato non sussisterà, se di due quantità uguali, ambedue positive, o negative, convertita una in astratta per darle l'uffizio di moltiplicatore, si lasci per sempre in dimenticanza la determinazione positiva, o negativa da lei separata, ma non già se questa si richiami in considerazione, e si faccia di essa conto per assegnare l'ultima conveniente determinazion al prodotto. Questo prescinder per un momento dal segno positivo, e negativo della quantità scelta a moltiplicatore, e rivocarlo in considerazione tosto fatta la moltiplica, io lo provo necessario da ciò stesso, che dal Venini con tutti si stabilisce, essere il prodotto di due quantità, una positiva, l'altra negativa, negativo. Sia la positiva quantità $+y$, e la negativa $-x$: è in arbitrio prender l'una, o l'altra a moltiplicatore, o sia spogliarla della determinazion sua, e convertirla in astratta. Il so, che riguardandosi in certo modo per più vicino all'astratto il positivo che il negativo, anzi confondendosi l'astratto, ed il positivo in uno, si corre per abito, e lo fa anche Venini ad onta delle sue avvertenze, a sceglier per quantità da rendersi astratta, ed incaricarsi dell'azione di moltiplicatore la quantità positiva, lasciando alla negativa la passione di moltiplicando. Ma qual ragione di tal preferenza, di privilegio tale? Niuna certamente. Or elevando ad astratta, delle due $+y$, $-x$, la quantità negativa $-x$, il prodotto sarà $+y\times x=+yx$, se non si richiami in conto la determinazion negativa segnata per $-$, dalla quale si elevò $-x$. Dunque è necessario, indispensabile questo richiamo.

La proporzione $1:-b::-a:+ab$, della quale Reyneau, e l'Agnesi si valsero (senza notare che in luogo dell' astratto 1 aver dovrebbe a primo termine il positivo $+1$)

aritmeticamente, com'eglino la proposero, considerata richiede dall'intelletto un concetto, che gli riesce alquanto duro, e pargli alla proporzione, la mera quantità spettante, estraneo, qual è la qualità, e questa negativa, della contenenza degli antecedenti nei conseguenti. Manca in oltre nel non far vedere, se il prodotto $+ab = -a \times -b$ sia, o no, in alcuna maniera distinto dal prodotto $+ab = +a \times +b$. All'incontro la mia Figura 14 presenta ne' triangoli simili in concetti facili, e chiari le quattro proporzioni relative alle quattro diverse combinazioni di moltiplica tra le quantità positive e negative, ed esattamente distingue i quattro effetti.

È la notata mancanza comune all'argomento *per contrario* di Eulero, la sostanza del quale è il conchiudere dalla contrarietà di $+x$, $-x$ la contrarietà (*Fig.* 13) dei rettangoli $CESB = -y \times +x$, $CEPA = -y \times -x$.

La dimostrazione di Vincenzo Riccati acquista la somma chiarezza, e scopre il suo giusto valore applicata alla figura 13. Si riduce ella insomma al passaggio dal rettangolo positivo $CDRB = +y \times +x$ al negativo $CDQA = +y \times -x$, ed al passaggio da questo al positivo $CAPE = -y \times -x$: i quali passaggi ho io già grado grado descritti pagina 379. Ma la conclusione della positiva condizion di $CAPE = -y \times -x$ suppone il prender $CDQA$ negativo, siccome relativamente alla retta CD, così relativamente alla CA; e la positiva condizion di $CAPE$, che di tal guisa ne resulta, non lo identifica con $CDRB$, ma lo lascia in situazion distintissimo, contrario in angolo. Questi sono i riflessi nella riccatiana dimostrazione desiderati. Se a vestir la dimostrazione medesima di altra luce piaccia contemplarla nella Figura 14, bisogna dopo il passaggio dalla ordinata

$BP = \frac{+y \times +x}{+1}$ alla ordinata $AQ = \frac{+y \times -x}{+1}$ con il graduale cammino da $+x$ in $-x$ per lo zero, concepire che $tr = +y$ continuamente diminuendosi, ed annullandosi in t, si volga indi in $tv = -y$; con che la retta HK rotata intorno al punto C si trasferisce in FG, il punto P in R, il punto Q in O, e risulta $AO = \frac{-y \times -x}{+1}$: bisogna, a corto dire, procedere da un luogo geometrico rettilineo HK ad un altro FG: cioè la prima parte della dimostrazione riccatiana spetta l'uno, la seconda spetta l'altro; le ordinate $AO = \frac{-y \times -x}{+1}$, e $BP = \frac{+y \times +x}{+1}$ sono ambedue positive, ambedue alla negativa $AQ = \frac{+y \times -x}{+1}$ contrarie; ma AO, AQ sono contrarie alla stessa parte da C, in una direzione, appartenendo a diversi luoghi geometrici; e le BP, AQ sono contrarie a contraria parte di C, in direzioni parallele, ed al medesimo rettilineo luogo geometrico appartenendo. Ecco per amendue le figure collocata nel suo giusto prospetto la dimostrazione del Riccati.

Esente non va dal difetto di non appalesare la distinzione del positivo $-y \times -x$ dal positivo $+y \times +x$ la dimostrazione del Wallis, dell'Alembert, e che in Italia eziandío mantiene il primo posto. E certo è poi, che la moltiplica risolvesi in fondo in una iterata addizione, e che preso ad esplicito indicamento di tale addizione il segno $+$ prefisso al moltiplicator positivo, ne vien *per contrario* che forza di esprimer, e di ingiunger sottrazione similmente iterata acquisti il segno $-$ prefisso a moltiplicator negativo; laonde importando la sottrazione di convertir in contrario il segno della quantità sottraenda, manifestasi dovere in conseguenza i prodotti di moltiplicator negativo esser forniti di segno contrario a quello dei prodotti di moltiplicator positivo. Senza però passare per tale risoluzione, e stando all'idea immediata della moltiplica, è a me sembrato potersi la contrarietà de' prodotti inferire direttamente dalla contrarietà delle determinazioni affisse al moltiplicator positivo, e negativo. D'altro canto giusta essa risoluzione l'immediato concetto de' prodotti viene ad esser quello di composte quantità da aggiugnersi, o da sottrarsi; e tale non è l'immediato aspetto, sotto il quale nella Figura 13 presentansi i quattro rettangoli, e nella Figura 14 le quattro rette BP, AQ, BR, AO: altro non presentan al guardo che sè, la grandezza, e la situazion loro, la contrarietà della quale negli uni, o nelle une rispetto ad altri, od altre noi distinguiamo con i titoli di positivo, e negativo. Per attenermi adunque semplicemente alla prima idea delle quantità positive, e negative, che è la contrarietà, e per conformare il meglio possibile ne' concetti de' prodotti l'aritmetica alla geometria, ho amato di astenermi dall'introdurre l'accennata risoluzione, sebben valevole a render più sensibile la dimostrazione.

Non rimane più a dire, che della sentenza del Wolfio al fine della pagina 355 da me trascritta contro la ragione di quantità positiva $+x$ a quantità negativa $-Y$, o di negativa $-x$ a positiva $+Y$, e contro l'uguaglianza delle due ragioni, contro cioè l'equazione $\frac{+x}{-Y} = \frac{-x}{+Y}$. Ragione geometrica essendo la considerazione del contenersi una quantità in altra, e l'espression delle volte, che l'una è nell'altra contenuta, dicendosi della geometrica ragione l'esponente; è ben manifesto importar questo un concetto astratto, niente meno che il moltiplicatore: si corrispondono, coincidon anzi antecedente di geometrica ragione il quale contenga, prodotto, dividendo; conseguente contenuto, moltiplicando, divisore; esponente di ragione, moltiplicatore, quoziente. La ragione geometrica ha luogo nella sua semplicità, e precisione tra quantità positiva, e quantità positiva, ovvero tra quantità negativa, e quantità negativa, cioè $\frac{+x}{+Y}$, $\frac{-x}{-Y}$ sono due ragioni geometriche in semplice preciso senso, in quanto che può concepirsi una quantità astratta, per cui moltiplicata $+Y$ risulti $+x$, e moltiplicata $-Y$ risulti $-x$. In simil senso semplice, preciso non si può dire, che sieno ragioni vere le $\frac{+x}{-Y}$, $\frac{-x}{+Y}$; perchè nè $-Y$ può dare $+x$, nè $+Y$ dar può $-x$, se non moltiplicando per quantità negativa, e per conseguenza l'esponente, in luogo di essere astratto, è necessariamente negativo. Mal si direbbe però essere $+x$ rispetto $-Y$, o reciprocamente, come merce rispetto a prezzo, cioè quantità eterogenee, e per qualunque verso escludenti idea di geometrica ragione. È assolutamente di qualsivoglia modo impossibile fare di prezzo moltiplicato merce, o di merce moltiplicata prezzo. Non così di $+x$, $-Y$, potendosi da $-Y$ ottener $+x$, sol che si moltiplichi per quantità negativa, la qual supporrò $-m$; onde si avrà $+x=-Y\times-m$, e $\frac{+x}{-Y}=-m$; ed istessamente $\frac{-x}{+Y}=-m$. Conchiudiamo adunque non essere da confondere le ragioni geometriche $\frac{+x}{+Y}$, $\frac{-x}{-Y}$, e le $\frac{+x}{-Y}$, $\frac{-x}{+Y}$: quelle, siccome di esponente astratto, esser di concetto semplice, preciso; queste, siccome di esponente determinato negativo, essere di concetto doppio, modificato. E quantunque poi sia $\frac{+x}{-Y}=-m$, $\frac{-x}{+Y}=-m$; pure non è senza motivo, se la mente apprende tra l'una e l'altra di tali ragioni una qualche differenza: vi ha realmente contrario procedere da antecedente a conseguente, invertimento nelle determinazioni loro, e l'esponente $-m$ è riguardo alla prima $\frac{+x}{-Y}$ simile nella determinazione al conseguente che moltiplica, contrario all'antecedente che produce; e riguardo alla seconda tutto all'opposto, contrario al conseguente che moltiplica, simile all' antecedente che produce. Cionondimanco essendo l'esponente per ambedue della stessa determinazion negativa, e della stessa grandezza, giustamente deducesi $\frac{+x}{-Y} = \frac{-x}{+Y}$. La moltiplica in croce dà $+x \times +Y = -x \times -Y$, i due positivi distinti, in quantità uguali. Vi han dunque nel parlare del Wolfio dei sensi veri ai falsi mescolati, che egli non separò, e de' quali non giunse a riconoscer le vere cause. La geometría gli sparge della più limpida luce. Le ragioni $\frac{+x}{+Y}$, $\frac{-x}{-Y}$ appartengono (*Fig.* 14) al luogo geometrico rettilineo KH, come apparirà evidentemente fatta $BP = +Y$, $AQ = -Y$, le ragioni $\frac{+x}{-Y}$, $\frac{-x}{+Y}$ appartengono al luogo geometrico rettilineo GF, il che rendesi manifesto posta $BR = -Y$, $AO = +Y$. Adoperato mi sono in questo capo oltre mio volere cresciuto di tessere l'intera storia, corroborare la dimostrazione, dilucidar la metafisica degli articoli tolti in esso a disamina. Se stato non fossi nell'ultima parte felice sì da appagare chiunque, difficil troppo ad ottenersi essendo il consenso degli intelletti nella metafisica delle cose, gioverà almeno l'avere versati i soggetti per i varj lor lati, l'aver gettata qualche novella vista, ed aperto forse l'orizzonte ad altre.

ERRORI   *CORREZIONI.*

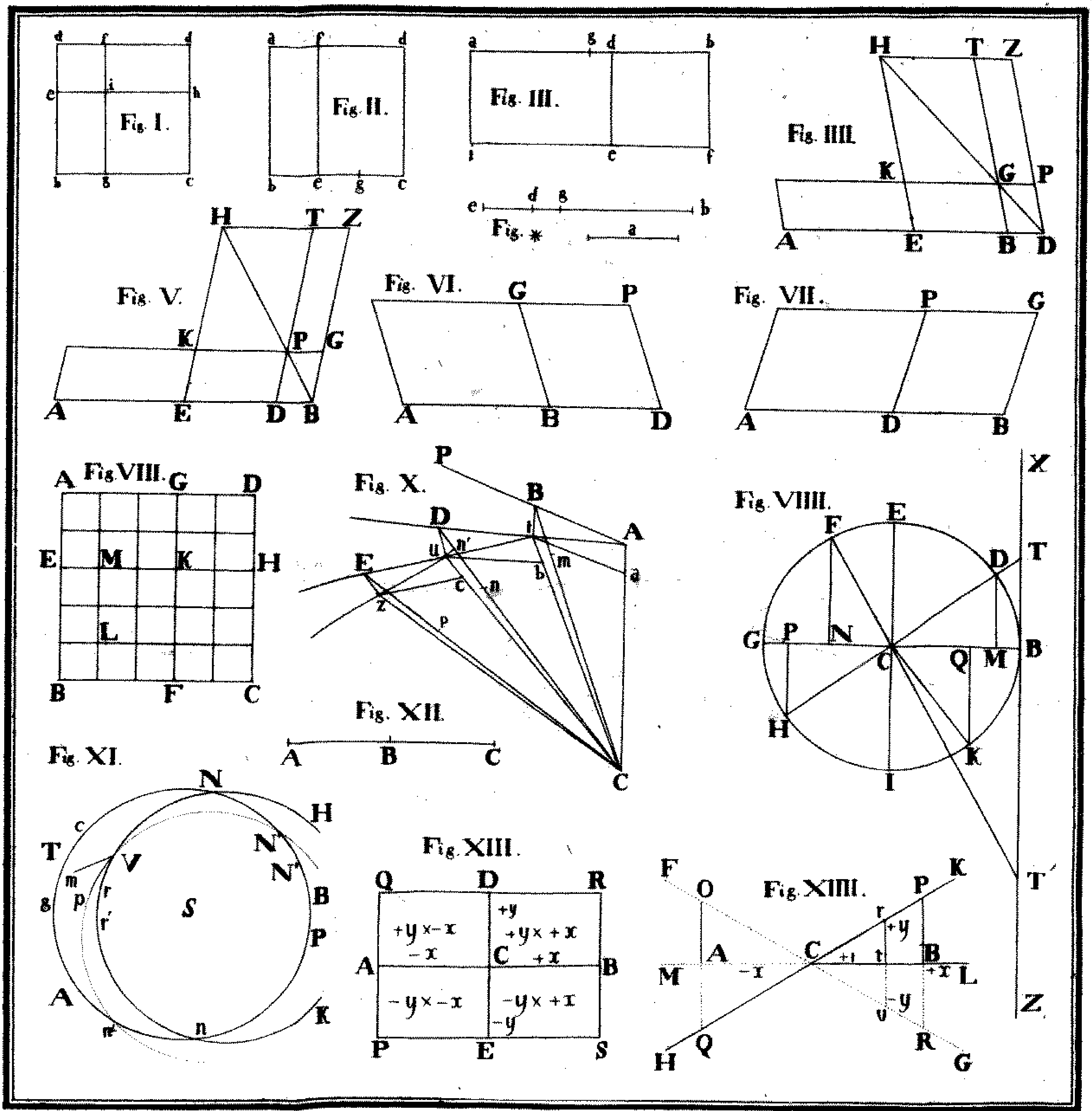
spettanti i calcoli, e le figure.

Pag.	*lin.*		
2	20	$cg, cd,$	$cg, ch,$
4	16	la retta a	la retta a (*Fig.* *)
·	31	dividendo per $8a^2+$	dividendo per $8, a^2+$
97	9	$\frac{t \pm n}{z - x}$	$\frac{y \pm n}{z - x}$
110	23	$(z - \frac{1}{2}tu)$	$(z - \frac{1}{2}tu)^2$
114	22	$x^3 + 2x + 2$	$x^3 + 2x^2 + x$ ... lib. VI quist. XXIII
116	27	$n^2 = (h-1)^2, n = h-1$	$n^2 = (h+1)^2, n = h+1$
120	7	$+4g^2a^2b$	$+4g^2a^2b^2$
124	13	$\left(\frac{a+b-1}{2}\right) + a$	$\left(\frac{a+b-1}{2}\right)^2 + a$
125	20	$(m^2 - n^2)$	$(m^2 - n^2)^2$
	21	$(m^2 - n^2 \pm 2mmn)^2$	$(m^2 - n^2 \pm 2mn)^2$
128	6	$(m^2 + n^2)$	$(m^2 + n^2)^2$
140	1	$\sqrt{(y^2 - z^2)}$	$\sqrt{(y^2 + z^2)}$
	2	$\sqrt{\frac{4y^2+h^2}{4y^2}};$	$\sqrt{\frac{4y^4+h^2}{4y^2}};$
147	12	sarà $A.\frac{q^2}{p^2}$	sarà $A.\frac{p^2}{q^2}$
149	28	$.\ v A'' \ .\ .\ v q''$	$v' A''\ .\ .\ v' q''$
156	23	$10.22.220.$	$10.22 = 220.$
242	13	$\sqrt{(4\sqrt{7})} - 7$	$\sqrt{(4\sqrt{7} - 7)}$
243	8	$\sqrt{(P^2 - Q},$	$\sqrt{(P^2 - Q)},$
	12	$\sqrt{(P + \sqrt{Q})} =$	$\sqrt{(P - \sqrt{Q})} =$
244	18	$x + x = \sqrt{Q},$	$x + y = \sqrt{Q},$
	24	$\sqrt{(2\sqrt{7} + \frac{1}{2}\sqrt{7})}$	$\sqrt{(2\sqrt{7} + \frac{3}{2}\sqrt{7})}$
246	1	$\frac{3}{2}\sqrt{} = 7$	$\frac{3}{2}\sqrt{} - 7$
249	25	$\sqrt{} = y$	$\sqrt{} - y$
251	14	$\sqrt{(M \pm m)},$	$\sqrt{(-M \pm m)},$
253	5	$\frac{f}{\sqrt{}\cdot\sqrt{(\frac{1}{2}g \pm \sqrt{(g^2 \pm 4g)})}},$	$x = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{}\cdot\sqrt{(\frac{1}{2}g \pm \sqrt{(g^2 + 4g)})}},$

Pag.	*lin.*		
256	3, 14, 17,	$\sqrt{(\quad)}$	$\sqrt[3]{(\quad)}$
	3	$\sqrt{5}$	$\sqrt[3]{5}$
259	29	$m(3p^2+q(\sqrt{q},$	$m(3p^2+q)\sqrt{q},$
260	6	$\frac{1}{(P^2-Q)^3}$	$\frac{1}{(P^2-Q)^2}$
266	6	$\sqrt[n]{(P^3-Q)}$	$\sqrt[n]{(P^2-Q)}$
	23	$\sqrt[n]{(P-\sqrt{Q})(p+\sqrt{q})}$	$\sqrt[n]{(P-\sqrt{Q})}=(p-\sqrt{q})$
270	3	adunque x	adunque z
	7	$\frac{a^2}{\text{sen. } A}\cdot b^2$	$\frac{a^2}{\text{sen. } A}:b^2$
	10	$z(z-\frac{b^2}{q}):\frac{b^2}{q};$	$z(z-\frac{b^2}{q}):\frac{b^4}{q^2};$
	19	$::1.$	$::1:z.$
274	6	$\frac{1768\times17}{4930}=$	$\frac{1768\times17}{4930}+$
278	21	$-(2+y)\cdot4^5$	$-(2+y)\cdot4^2$
285	31	$25-106-4+$	$25-10-6-4+$
289	10	$ax^2+bx+n,$	$ax^2=bx+n,$
290	15	$6-2\sqrt{5}-2+2\sqrt{5}?$	$6-2\sqrt{5}-2+2\sqrt{5}=4?$
295	4	x^{n-h}	x^{n-n}
305	18	$q.x;$	$q:x;$
308	12	$\alpha,\ \beta,\ \delta;$	$\alpha^3,\ \beta^3,\ \delta^3;$
314	23	$\frac{x^5}{x^4}:\frac{x^6}{x^5}\dots$	$\frac{x^5}{1^4}:\frac{x^6}{1^5}\dots$
336	8	sia ad	sia (*Fig.* 10) ad
338	25, 28, 29, 30	n	n'
339	8, 9, 10, 11		
340	24	Vn	Vr
366	25	$na+dg$	$na+dq$
376	16	$=-1.$	$=-12.$
382	31	$+1.+y$	$+1:+y$

Pag.	*lin.*	*ERRORI* *spettanti il Testo.*	*CORREZIONI.*
25	23	ponendo prima	ponendo primo
36	27	interezza e confronto	interezza, in confronto
38	29	*garde*	*a gardé*
69	15	969	959
75	3	*complexem*	*complexam*
97	8	quanyità	quantità
99	20	*Base*	*Ipotenusa Base Perpendicolo*
123	9	problema antecedente	problema 5.° della Parte antecedente
124	10	problema 5.°.	problema 5.° Parte II.
162	25	tutto insieme	tutte insieme
237	4	trasferite,	trasferite?
253	18	asserì su che	asserì su di ciò, che
268	9, 10	quadrata dinotato per *M*, delle	quadrata, dinotata per *M* delle
286	18	*donatu rvero*	*donatur vero*
301	15	coidente	evidente
306	17	della retta *x* a tale	della retta a tale
310	13	coidentemente	evidentemente
311	12, 17	concretta concretto,	concreta concreto,
321	21	*tentandum*	*tantundem*
324	5	In due	Tra due
344	25	della proporzionata	dalla proporzionata
	31	e sopra	o sopra
348	18	uniformemente ritardato	uniformemente accelerato, o ritardato
351	9	*d'indicarli,*	*d'indicarle,*
377	18	ad astratto.	ed astratto
378	29	negativa	negativo

Si avvederà da sè il Lettor saggio di altri errori di virgole, e punti saltati fuori nell'atto della impressione, e non rimessi, o non a suo luogo.



Guliel. Silvestri inc.